DEGLI ARGINI
DI TERRA

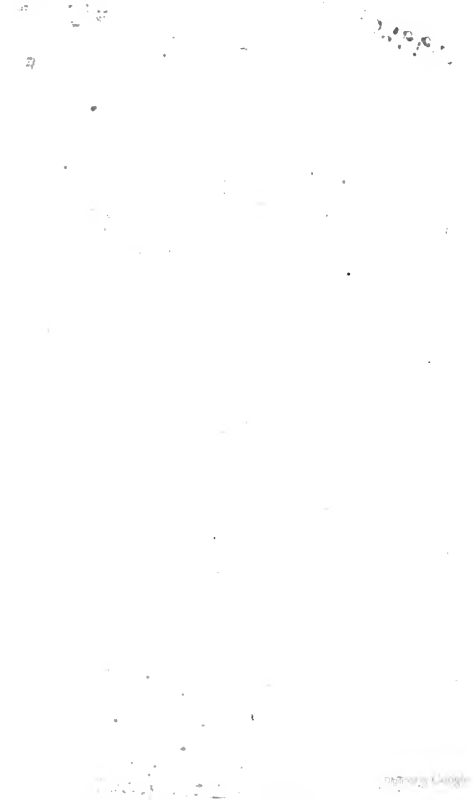
TRATTATO

DI

ANTONIO BORDONI

PROFESSORE D'ELEMENTI DI MATEMATICA
NELL' IMPERIALE REGIA UNIVERSITA' DI PAVIA,

UNO DEI QUARANTA DELLA SOCIETA' ITALIANA,
ecc. ecc.

MILANO, 1820.
Presso Paolo Emilio Giusti,
stampatore-librajo e fonditore
nella contr. di s. Margherita ai N. 1118 e 1120
all' insegna de' Classici.

TRATTATO

DEGLI ARGINI DI TERRA.

PRELIMINARE.

Si chiamano qui *argini* tutti gli ostacoli, che impediscono alle acque di spandersi orizzontalmente. Alcuni argini si dicono *naturali* ed altri *artificiali:* naturali si appellano quelli, che si formano, o colle materie trasportate casualmente dalle acque, o colle scavazioni pure accidentali fatte dalle medesime: artificiali in vece si dicono quelli, che sono effettivamente formati dagli uomini o la cui formazione è almeno diretta da essi: noi parleremo di questi ultimi, cioè degli artificiali.

Gli argini artificiali sono corpi formati di terra, o di pietre, o di altra materia fra le più comuni, ovvero di più di esse combinate insieme opportunamente; ed essi si costruiscono d'ordinario, o per deviare le acque da una via che seguirebbero naturalmente, o per circoscriverle in certi determinati luoghi, ovvero si fanno per uso di strade o per sostenere canali: nel presente Trattato si avranno di mira particolarmente gli argini ordinari, quelli cioè, i quali consistono in lunghi corpi di terra alzati

sulle campagne prossime ai fiumi onde impedire alle loro acque d'inondare le campagne adiacenti: però, a suo tempo, si dirà qualche cosa anco degli altri, vale a dire, e di quelli formati con pietre o legni, e di quelli che si fanno per semplice uso di strade o per sostenere canali, qualunque sia la materia componente i medesimi.

Il corpo costituente un argine interminato ha generalmente quattro facce, cioè una appoggiata alla superficie della campagna, una opposta a questa e voltata direttamente verso il cielo, e due altre laterali.

Quella faccia di un argine che è voltata direttamente verso il cielo si appella *piano* o *soglia* dell' argine; e generalmente quando l' argine non sia molto lungo è orizzontale ed ha i due estremi longitudinali per l' ordinario fra loro paralleli. Quelle due che sono laterali diconsi *scarpe* dell' argine; ed esse si possono supporre generate da due rette, che scorrano lungo i due estremi anzidetti del piano, variando opportunamente d' inclinazione coll' orizzonte: e la quarta, cioè quella colla quale l' argine tocca la superficie della campagna dicesi *base* di esso.

Vi sono però alcuni argini ai quali manca il piano, per cui superiormente finiscono in una linea comune alle due scarpe, la quale si dice *cresta* dell' argine: questi argini si chiamano comunemente *argini a cresta*. Così molte volte si dice base dell' argine quella porzione della superficie della campagna, che è al contatto col corpo dell' argine, ossia colla faccia detta qui sopra base dell' argine stesso.

Si nomina particolarmente *linea dell' argine* quella situata nel suo piano e che lo divide pel lungo in

due parti eguali: così, projettando verticalmente la linea di un argine sulla base di esso, si ha in questa base quella linea, che si dice *traccia dell'argine* medesimo; generalmente la traccia di un argine divide la base di esso in due parti fra loro eguali.

Segando un argine con un piano perpendicolare alla sua linea, o meglio con un piano verticale condotto per una normale orizzontale della linea medesima, si ha nella sezione una figura, che si denomina *profilo* ovvero *sezione ordinaria* dell' argine stesso. Questa figura generalmente consiste in un quadrilatero, o in un triangolo se l'argine sia a cresta.

Si chiama *altezza* dell'argine la verticale, che ha un termine nella traccia e l'altro nella linea di esso medesimo; generalmente a differenti punti della traccia di un argine corrispondono altezze disuguali. Così, si dice altezza di un profilo di un argine quella verticale, che è l'altezza dell'argine medesimo, in quel punto dove corrisponde il profilo stesso.

Una porzione d'argine, la quale abbia almeno per un piccolo tratto il piano e le scarpe, come l'argine stesso, si chiama in generale *tronco* di esso; si dice poi *tronco ordinario* una di quelle porzioni intatte di un argine, la quale sia compresa fra due profili del medesimo.

Evidentemente un argine sul terreno sarà affatto individuato, quando sarà individuata la sua traccia ed anco i successivi suoi differenti profili; e di fatto per individuare sul terreno un argine, comunemente si indicano la sua traccia, ed i successivi differenti profili del medesimo.

Per rappresentare poi sulla carta e mediante il

disegno un argine qualunque, si fa sulla mappa della compagna dove esso esiste o dev' essere costruito, la linea indicante la sua traccia, la quale risulta prossimamente simile alla vera linea dell'argine medesimo; e si segnano quei punti di essa linea disegnata nei quali i profili dell'argine sono differenti l'un dall'altro; indi si fa un secondo disegno, che rappresenta quella figura che si avrebbe distendendo in un piano quella porzione di superficie, pressochè cilindrica, nella quale esistono la linea e la traccia naturali dell'argine stesso; e si tirano in esso quelle rette che indicano le altezze dell'argine corrispondenti ai punti già segnati nel disegno della traccia: questo secondo disegno si chiama *sezione* o *profilo longitudinale* dell'argine, ed il primo *andamento* dell'argine stesso. Finalmente per compire la rappresentazione di un argine si fanno i disegni anco di tutti i profili corrispondenti ai punti suddetti della traccia od alle rette verticali tirate dianzi nella sezione longitudinale, e si stabilisce qualche convenzione per indicare come si debbono supporre uniti fra loro. Nell'eseguire i tre medesimi disegni qui nominati si adottano generalmente due scale differenti, una per quelle dimensioni dell'argine che sono longitudinali e l'altra per le altre dimensioni del medesimo; e si procura che l'unità della prima sia una parte aliquota della unità della seconda; cioè si fa per questi disegni ciò che si suole fare pel disegno di una livellazione composta, ed anco per le stessissime ragioni.

Il secondo dei suddetti disegni non è, per la rappresentazione di un argine, assolutamente necessa-

rio, è però molto utile; giacchè con esso in un colpo d' occhio si veggono gli andamenti sì della linea dell' argine che della sua traccia per rispetto all' orizzonte, ciò che è della massima importanza.

La campagna sulla quale è posto l' argine, si considera divisa in due parti dalla traccia dell' argine medesimo: quella, di queste due parti, che sarà dalla stessa banda dell' acqua sostenuta o tenuta a segno dall' argine, si dirà *campagna interna all'argine*, ed i suoi punti si diranno *punti interni*; all'opposto, l'altra parte di essa campagna, si chiamerà la *campagna esterna all'argine*, ed i suoi punti, *punti esterni.* Così quella scarpa dell'argine, la quale sarà dalla stessa parte dell'acqua anzidetta, si denominerà *scarpa interna* a differenza dell' altra che si dirà *scarpa esterna.*

Le due linee, che sono gli estremi longitudinali del piano o soglia dell' argine, si appelleranno *ciglj dell'argine* stesso; e particolarmente si dirà *ciglio interno* quello situato verso l'acqua tenuta a segno dall'argine, e *ciglio esterno* l'altro. In generale, tutti gli oggetti che per rispetto alla linea di un argine saranno situati dalla stessa banda dell'acqua sostenuta dal medesimo, si chiameranno interni o dentro la linea dell'argine; e tutti gli altri chiameransi invece esterni o fuori della linea dell' argine medesimo.

Il modo superiormente indicato per rappresentare un argine è quello che si usa effettivamente quando l'argine sia l'oggetto principale a rappresentarsi e la scala od il modulo adottato abbia una sensibile lunghezza; quando poi si deve rappresentare l' andamento di un argine in una carta nella quale vi siano

indicate o si debbano indicare anco delle strade, delle sponde de' canali, ecc. di una grande lunghezza, per cui il modulo sia di una picciolissima estensione, si fa un semplice disegno analogo all'AB (fig. 1), se l'argine ha il piano, ovvero al CD, se esso è a cresta, avendo riguardo di dirigere le lineette, visibili nella figura a foggia di squame, dai cigli o dalla cresta dell'argine a seconda della corrente dell'acqua tenuta a segno dall' argine, o della corrente d' altr' acqua circostante.

Sopra il piano di un argine si costruisce talvolta un altro picciolo corpo di terra, le cui sezioni fatte dai piani dei profili dell'argine estesi sufficientemente sono comunemente triangoli isosceli o segmenti circolari aventi una piccola altezza e di una base eguale alla larghezza corrispondente del piano dell'argine medesimo: questo corpo di terra dicesi da alcuni *Cappello dell'argine* stesso: parleremo di esso a suo luogo.

Gli argini sono di quelle fabbriche nella costruzione delle quali si ha particolarmente di mira la *solidità*, ossia *fermezza* o *stabilità*, e solo qualche volta si pensa anco alla comodità; in molti ragionamenti che si fanno relativi ad essi si ammette tacitamente di *volerli costruire nel minimo tempo* e *col minor dispendio possibile;* vale a dire nel minimo tempo con un dato dispendio, o reciprocamente col minimo dispendio in un dato tempo.

Avendo riguardo alla successione delle idee che naturalmente presentansi nel meditare sulla costruzione e conservazione degli argini, ho deciso di dividere il presente Trattato in sette parti e di adot-

tare l'ordine seguente, cioè di parlare; nella *prima* parte dello sforzo che fa l'acqua sui corpi, che si oppongono alla sua espansione particolarmente laterale; nella *seconda* delle dimensioni dei profili; nella *terza* del trasportamento delle terre; nella *quarta* della traccia di un argine qualunque, e dei luoghi dove convien prendere la terra per formarlo; nella *quinta* della vera costruzione; nella *sesta* del modo di valutare la spesa od il costo di esso; e finalmente nella *settima* di parlare di alcune cose necessarie pel buon governo di un argine di terra.

PARTE PRIMA.

Degli sforzi fatti dalle acque sui corpi opposti alle loro espansioni laterali.

Nella determinazione dello sforzo che fanno le acque sugli ostacoli che si oppongono alla laterale loro espansione, distinguo due casi, il caso delle acque stagnanti e quello delle acque correnti; ed incomincio dal primo, cioè da quello delle acque stagnanti o dormienti, e poscia parlo di quello delle acque correnti.

Lo sforzo che fa l'acqua stagnante sui differenti punti dei corpi che si oppongono alla sua dilatazione o che sono immersi in essa dicesi particolarmente *pressione*.

Nel corso di queste indagini si ha bisogno più

volte di conoscere, tanto le pressioni *parziali* esercitate dall'acqua sostenuta da un argine contro una piccola porzione della sua scarpa interna, quanto la pressione esercitata dalla medesima contro una di quelle porzioni rettangolari della scarpa stessa, che hanno un lato a fior d'acqua, non che le due componenti orizzontale e verticale di quest'ultima pressione; così credo bene di parlare di queste tre cose separatamente, e di incominciare dalla prima.

Proposizione prima. Teorema.

La pressione parziale esercitata dall'acqua stagnante tenuta a segno da un argine contro ogni piccola porzione della sua scarpa interna, quando essa abbia picciola tanto la larghezza quanto la lunghezza, è una forza, che agisse dall'interno verso l'esterno, in direzione perpendicolare alla stessa porzione; e la cui grandezza eguaglia il peso di un prisma di quest' acqua, il quale abbia per base la superficie premuta, e per altezza quella distanza, che ha questa superficie dal pelo dell' acqua medesima.

Questa proposizione è una verità conosciuta da chiunque abbia le nozioni anco più elementari di fisica; per questo non mi fermo a dimostrarla.

Corollario. Le pressioni parziali esercitate dalla stessa acqua stagnante contro le porzioni della scarpa di un argine saranno proporzionali alle semplici distanze che avranno dalla superficie superiore dell'acqua medesima, quando esse siano fra loro equivalenti ed abbiano picciole sì le lunghezze che le larghezze; vale a dire, le pressioni sopportate dai differenti punti della scarpa interna di un argine saranno proporzionali alle distanze di essi punti dal pelo dell' acqua.

Proposizione seconda. TEOREMA.

La pressione esercitata dall' acqua sostenuta da un argine contro una porzione rettangolare della sua scarpa interna, la quale abbia un lato orizzontale nella superficie superiore dell'acqua stessa, è diretta perpendicolarmente contro di esso rettangolo; ed eguaglia il peso di un prisma d'acqua di quella sostenuta, il quale abbia per base il rettangolo premuto e per altezza la metà della distanza fra il lato inferiore di questo medesimo rettangolo ed il pelo dell' acqua stessa.

Sebbene questa proposizione ed anco la seguente non siano meno conosciute della antecedente, non ostante, siccome esse sono la base fondamentale di varie proposizioni che si tratteranno nel seguito, così non istimo inutile di esporre le loro soluzioni con tutta l' estensione voluta dalla importanza di esse.

Siccome la pressione dell'acqua contro il rettangolo è la risultante delle pressioni parziali esercitate da essa sui punti o sulle piccole porzioni di esso rettangolo, e queste parziali pressioni hanno tutte una direzione perpendicolare alle rispettive porzioni premute, e però al rettangolo stesso, e sono dirette contro le medesime porzioni; così la pressione di cui si parla, essendo la risultante di queste pressioni parziali, sarà anch'essa perpendicolare al rettangolo e diretta contro di esso: appunto come si è asserito in primo luogo nella proposta proposizione.

Si supponga il rettangolo segato in due parti eguali dal piano verticale condotto pei punti di

mezzo dei suoi due lati orizzontali; e si tenga indicata colla retta AB (fig. 2) la sezione così fatta al medesimo rettangolo e colla AC quella fatta dallo stesso piano alla superficie superiore dell'acqua; più si nomini l ciascun lato orizzontale del rettangolo, L la retta AB, x una parte AM qualunque della stessa AB, α l'angolo BAC; e G il peso specifico dell'acqua; e conducasi la verticale BC.

Egli è evidente, che la pressione cercata sarà eguale all'integrale del differenziale $G.ldx.x$ sen. α esteso da $x = 0$ sino ad $x = L$. Ma eseguita la integrazione rispetto alla x della differenziale Glsen.$\alpha.xdx$, ed esteso l'integrale risultante fra i limiti qui indicati, si ottiene l'espressione $\frac{1}{2} GlL^2$ sen. α, la quale è visibilmente il prodotto delle tre quantità G, lL, $\frac{1}{2} L$ sen. α; e per tanto, siccome il prodotto lL indica l'area del rettangolo immerso nell'acqua, ed $\frac{1}{2} L$ sen. α è una metà della verticale BC; per cui il prodotto di lL in $\frac{1}{2} L$ sen. α indica il volume di un prisma avente per base il rettangolo stesso, e per altezza la metà della verticale BC. Così l'integrale definito trovato, ossia la grandezza della pressione di cui si parla, sarà eguale al peso di un prisma d'acqua avente per base il rettangolo premuto, e per altezza la metà della distanza che ha il lato inferiore di esso rettangolo dal pelo dell'acqua; ciò che si è asserito in secondo luogo.

Corollario. Si nomini p la grandezza della pressione trovata qui sopra, e con p', L', l', α' si intendano delle quantità analoghe alle p, L, l, α, e relative ad un altro rettangolo immerso nell'acqua, come quello considerato dianzi; e si avrà

$p = \frac{1}{2} G l L^2$ sen. α, e $p' = \frac{1}{2} G l' L'^2$ sen. α'; e però

$$p : p' = l L^2 \text{ sen. } \alpha : l' L'^2 \text{ sen. } \alpha'.$$

Se i due rettangoli qni considerati fossero similmente inclinati all'orizzonte od al pelo dell'acqua, ed avessero le lunghezze ossia i lati orizzontali fra loro eguali, si avrebbe

$$p : p' = L^2 : L'^2;$$

cioè le pressioni contro di essi rettangoli sarebbero fra loro come i quadrati delle loro larghezze.

In virtù di quest'ultimo resultato, possiamo concludere, che, se l'acqua sostenuta da un tronco ordinario di un argine rettilineo avente la scarpa interna piana crescerà o calerà, le pressioni rispettive varieranno per modo che staranno fra loro come i quadrati delle larghezze di quelle porzioni della scarpa stessa, che saranno bagnate dall'acqua medesima.

Proposizione terza. TEOREMA.

Il centro della pressione considerata nella proposizione precedente, ossia quel punto del rettangolo premuto nel quale si può supporre applicata la stessa pressione, è situato nella retta, che unisse i punti di mezzo dei due lati orizzontali del medesimo rettangolo e distante dal suo termine superiore di due terze parti di essa retta.

Essendo questa pressione la risultante delle pressioni parziali di cui si è parlato sopra, il suo punto di applicazione sarà quel punto della retta AB, il quale ha dal termine A la distanza eguale alla somma dei momenti delle pressioni parziali, rispetto al

punto A stesso, divisa per la pressione p medesima; e però, siccome la somma di questi momenti è il valore corrispondente ad $x = L$ di quell'integrale particolare di $G l x^2 d x$ sen. α, che sparisce colla x medesima, e questo valore risulta $\frac{1}{3} G l L^3$ sen. α; così la distanza fra il punto A ed il centro di pressione, che si cerca, sarà eguale ad

$\frac{1}{3} G l L^3$ sen. α : $\frac{1}{2} G l L^2$ sen. α; e però a $\frac{2}{3} L$. Vale a dire, il centro della pressione esercitata dall'acqua sul detto rettangolo sarà quel punto della retta congiungente i due punti di mezzo dei lati orizzontali del rettangolo stesso, che ha una distanza dal termine superiore di questa medesima retta eguale a due terze parti di essa. Ciò che ec.

Osservazione I. Variando adunque l'altezza dell'acqua sostenuta da un tronco ordinario di un argine comune e rettilineo, varierà anco la posizione del centro della pressione da essa cagionata, alzandosi od abbassandosi, secondo che si alzerà o si abbasserà l'acqua stessa; e le distanze fra questo centro ed il pelo dell'acqua corrispondente saranno proporzionali alle semplici altezze dell'acqua medesima.

Osservazione II. Occorrendo, si potrà prescindere affatto dalla azione che eserciterà l'acqua sulla scarpa rettangolare anzidetta, applicando al centro di pressione anzi determinato una forza diretta contro la scarpa stessa ed in grandezza eguale al peso del prisma d'acqua di cui si è parlato nella antecedente proposizione.

Proposizione quarta. Problema.

Trovare le componenti orizzontale e verticale della pressione considerata nelle proposizioni precedenti.

Si seghi la AE eguale a due terzi della AB, si tiri la Ep perpendicolare alla stessa AB; e si costruisca il rettangolo $EOpV$, che abbia il lato EO orizzontale, e però l'EV verticale. Si ritengano le denominazioni usate nelle due proposizioni precedenti, più si nominino le componenti orizzontale e verticale cercate rispettivamente O e V: esse saranno dirette la prima secondo la retta EO e l'altra secondo la EV.

Essendo l'angolo pEV eguale all'A, si avrà $V = p \cos. \alpha$, ed $O = p \text{ sen. } \alpha$; e però, per essere

$$p = \tfrac{1}{2} G l L^2 \text{ sen. } \alpha, \text{ sarà}$$

$V = \frac{1}{2} G l L^2 \text{ sen. } \alpha \cos. \alpha$, ed $O = \frac{1}{2} G l L^2 \text{ sen.}^2 \alpha$: valori cercati.

Corollario I. Per essere $L \text{ sen. } \alpha = CB$, il valore qui trovato dalla O si potrà scrivere anco colla espressione $\frac{1}{2} G l . \overline{BC}^2$, la quale ci insegna, che tutti i rettangoli aventi lunghezze fra loro eguali, ed i lati inferiori distanti egualmente dal pelo dell'acqua, soffriranno pressioni orizzontali eguali fra loro. Quindi lo sforzo, che un'acqua stagnante farà per ismovere orizzontalmente un argine ordinario, che si opponga alla sua espansione, sarà affatto indipendente dal pendìo od inclinazione coll'orizzonte della stessa scarpa interna; cioè questo sforzo non cambierassi variando la inclinazione all'orizzonte di questa scarpa, purchè non si alteri l'altezza dell'acqua.

Corollario II. Così, per essere

$V = \frac{1}{2} G l L^2 \text{ sen. } \alpha \text{ cos. } \alpha = G l \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC$;

cioè eguale al prodotto di Gl nell' area del triangolo ABC; questa componente risulta eguale al peso del prisma d'acqua, che ha per base il triangolo stesso ABC e per altezza l; cioè essa è eguale al peso dell' acqua sovrastante verticalmente alla porzione rettangolare della scarpa bagnata. Per tanto, aumentando o diminuendo la base della scarpa interna di un argine, senza punto variare la sua altezza, correlativamente si aumenterà o si diminuirà l' effetto verticale dell' acqua contro la stessa scarpa interna dell' argine.

Corollario III. Indicando colle O', V' le componenti della pressione p', contemplata nella proposizione seconda, analoghe alle O, V della p; e ritenute le denominazioni già usate, si avrà

$V' = \frac{1}{2} G l' L'^2 \text{ sen. } \alpha' \text{ cos. } \alpha'$, ed $O' = \frac{1}{2} G l' L'^2 \text{ sen.}^2 \alpha'$.

Paragonando questi valori delle V', O' agli analoghi delle V, O si avranno i rapporti sì delle V, V', che delle O, O', qualunque siano le quantità l', l, L, L', α, α'. Se i due rettangoli avessero le lunghezze e le inclinazioni coll'orizzonte rispettivamente eguali, si avrebbe

$V : V' = L^2 : L'^2$; così $O : O' = L^2 : L'^2$;

cioè tanto le componenti verticali, quanto le orizzontali starebbero fra loro come i quadrati delle larghezze dei piani; e siccome le larghezze di questi piani sono proporzionali alle distanze, che hanno i loro lati inferiori dal pelo dell'acqua; così le stesse componenti in quistione staranno anco, come i quadrati delle distanze fra i lati inferiori dei rettangoli ed il pelo dell'acqua; vale a dire come i quadrati delle altezze che ha l'acqua sui lati inferiori dei medesimi rettangoli.

Proposizione quinta. PROBLEMA.

Data l' equazione di una superficie immersa interamente o solo in parte nell' acqua, trovare la somma delle pressioni esercitate contro di essa dall' acqua stagnante esistente da una sua banda, non che le pressioni che essa superficie soffre tanto verticalmente, quanto secondo una data retta orizzontale?

Indicando colle x, y, z le coordinate rettangole di un punto qualunque della superficie data, e supposto il piano delle x, y orizzontale, e nella stessa superficie superiore dell' acqua, e la ordinata z verticale diretta dall' alto al basso, e coll' α l' angolo compreso dalla retta orizzontale data ed il prolungamento dell' asse delle x, evidentemente le tre espressioni

$$G\int\int z\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

$$G\int\int z dx dy,\ G\cos\alpha\int\int z\left(\frac{dz}{dx}\right)dxdy + G\operatorname{sen}\alpha\int\int z\left(\frac{dz}{dy}\right)dxdy,$$

dove i quattro integrali siano estesi a tutta la superficie toccata dall'acqua, esprimeranno la prima la somma delle pressioni esercitate dall' acqua perpendicolarmente contro la superficie, la seconda la pressione verticale, e la terza quella pel verso della retta orizzontale data, che sono le tre quantità richieste.

Per avere effettivamente queste tre quantità converrà porre nei quattro integrali visibili nelle esposte espressioni in luogo della z, e delle sue derivate $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ i loro valori cavati dalla equazione

data fra le coordinate x, y, z, della superficie ed eseguire le doppie integrazioni, ed estendere gli integrali come si è detto.

Osservazione. La seconda delle espressioni esposte, cioè $\iint G z\, dx\, dy$, c' insegna, che la pressione verticale sofferta dalla superficie, eguaglia il peso dell' acqua sovrastante verticalmente ad essa medesima; e la terza ovvero la equivalente

$$\cos \alpha \iint G z\, dz\, dy + \operatorname{sen} \alpha \iint G z\, dz\, dx$$

esprime che la pressione totale diretta orizzontalmente è affatto indipendente dalla natura della superficie; giacchè essa dipende solo e dalla posizione e dalla figura del contorno di essa.

Quindi qualunque sia la figura della interna scarpa di un argine, la pressione verticale esercitata su di essa dall' acqua che vi si appoggia, sarà eguale al peso dell' acqua sovrastante verticalmente ad essa scarpa; e la pressione orizzontale secondo qualunque retta sarà costantemente la medesima, purchè il contorno di essa superficie non varii, dimodochè, staccandosi dalla parte interna dell' argine una sua porzione qualunque, od unendovela, la pressione orizzontale, cioè lo sforzo dell' acqua per ismoverlo orizzontalmente non si aumenterà nè diminuirà.

Corollario I. Essendo l' integrale doppio

$$\iint G z\, dx\, dy \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

eguale evidentemente al momento della superficie bagnata dall' acqua per rispetto al pelo dell' acqua medesima; supposta D la distanza fra il centro di

gravità della superficie bagnata ed il pelo dell'acqua, si avrà come è noto

$$D\iint dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}=\iint zdxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2};$$

e pertanto, la somma delle pressioni sofferte dalla superficie immersa interamente o solo in parte nell'acqua sarà eguale al peso di un prisma d'acqua il quale abbia per base la superficie bagnata e per altezza la distanza che avrà il centro di gravità di essa superficie dal pelo dell'acqua.

Corollario II. Se la scarpa interna dell'argine o meglio di un suo tronco ordinario e rettilineo fosse una superficie cilindrica avente la generatrice orizzontale, la totale pressione orizzontale diretta parallelamente ad un suo profilo, mediante la terza delle esposte espressioni, si troverebbe eguale al peso di un prisma d'acqua avente per base il rettangolo compreso dalla altezza e dalla lunghezza del tronco, e per altezza la metà della stessa altezza dell'argine: risultamento molto importante per gli argini comuni.

Esempio. La superficie immersa nell'acqua sia il triangolo, che è porzione della superficie avente per equazione

$$z-mx-ny-A=0,$$

e che ha i vertici dei suoi angoli distanti dal pelo dell'acqua rispettivamente di a,b,c. In questo caso la somma delle pressioni parziali esercitate dall'acqua contro la superficie medesima sarà anco la loro risultante, cioè la vera pressione sofferta dalla superficie stessa e diretta a smoverla.

Ponendo nella espressione

$$G\iint z\,dx\,dy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

in luogo delle z, $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ i loro valori $mx+ny+A$, m, ed n cavati dalla equazione del piano, la pressione risulterà espressa dal prodotto di $G\sqrt{(1+m^2+n^2)}$ nell' integrale

$$\iint(mx+ny+A)\,dx\,dy,$$

esteso fra i contorni del triangolo suddetto.

Facendo quest' ultima integrazione ed estendendo convenientemente l' integrale, come si è detto, si trova la pressione richiesta espressa da $G(a+b+c)\frac{T}{3}$: dove T indica l' area del triangolo premuto. Questo valore della pressione di cui si parla si poteva determinare immediatamente anco colla proprietà dichiarata nel primo corollario dianzi esposto.

Osservazione. Sapendosi ora determinare la pressione esercitata dall' acqua su di un triangolo piano, comunque immerso sott' acqua, con facilità si potrà determinare anco la pressione esercitata contro il piano di qualunque poligono rettilineo comunque immerso nell' acqua stessa.

Proposizione sesta. Problema.

Trovare il centro della pressione esercitata dall' acqua stagnante contro il triangolo considerato dianzi nell' esempio della proposizione precedente?

Si indichi il triangolo coll' ABC (Fig. 3); si tirino le BD, AE perpendicolari rispettivamente ai lati AC, BC; si nomini t il triangolo ABD, t' l'altro BDC, e si indichi colla d la distanza che ha il punto D dal pelo dell'acqua; più si ritengano le denominazioni già usate sopra.

Con facilità si trova la somma dei momenti, per rispetto alla retta AC, delle pressioni parziali esercitate dall'acqua sul triangolo ABC eguale ad

$$\tfrac{1}{12} BD\,(at + dT + ct' + 2bT)G;$$

e però la distanza fra la stessa retta AC ed il centro cercato sarà eguale ad

$\frac{1}{12} BD.\,(a.\,t + d.\,T + c.\,t' + 2\,b.\,T)\,G$ divisa per $G\,(a + b + c)\,\frac{T}{3}$, cioè sarà eguale al prodotto di $\frac{1}{4} BD$ nella frazione

$$(2\,b + d + \frac{t}{T}a + \frac{t'}{T}c) : (a + b + c).$$

Ponendo in quest'ultima espressione in luogo delle frazioni $\frac{t}{T}$, $\frac{t'}{T}$ i rapporti evidentemente equivalenti $\frac{AD}{AC}$, $\frac{DC}{AC}$, essa si riduce alla seguente

$$\frac{BD}{4AC} \cdot \frac{2b.AC + d.AC + a.AD + c.CD}{a + b + c};$$

di nuovo sostituendo in quest'altra invece del prodotto $d.AC$ il suo valore $a.CD + c.AD$, si ha una espressione, che si riduce facilmente alla semplicissima

$$\frac{BD}{4} \cdot \frac{a + 2b + c}{a + b + c}.$$

Similmente, si troverebbe la distanza fra il medesimo centro di pressione e la retta BC eguale ad

un quarto della AE moltiplicato per la frazione

$$\frac{b+2a+c}{a+b+c}.$$

Si concluda pertanto, che il punto cercato è quello del triangolo ABC, le cui distanze dalle rette a cui appartengono i lati AC, BC del triangolo stesso, sono rispettivamente date dalle seguenti espressioni

$$\tfrac{1}{4}BD.\frac{a+2b+c}{a+b+c},\ \tfrac{1}{4}AE.\frac{2a+b+c}{a+b+c}.$$

Osservazione I. Se si volesse la posizione del centro di cui si parla, mediante le sole distanze che hanno i vertici degli angoli del triangolo dalla superficie superiore dell'acqua, ed i lati di esso, basterebbe porre nelle due distanze trovate dianzi in luogo delle perpendicolari BD, AE i rispettivi valori formati coi lati del medesimo triangolo, cioè

$$\frac{2}{B}\sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)},\ \frac{2}{A}\sqrt{S(S-A)(S-B)(S-C)}:$$

dove A; B, C indicano ordinatamente i lati BC, AC, AB, ed S indica la loro semisomma, cioè $\tfrac{1}{2}(BC+AC+AB)$.

Osservazione II. Ora che si conosce il centro di pressione per un triangolo qualunque e comunque posto sott' acqua, con facilità si potrà determinare all'occorrenza anco il centro di pressione per un poligono piano rettilineo qualsivoglia, dividendo in triangoli, come si farebbe per trovare l'area, indi trovando la pressione ecc.

Osservazione III. Non faccio altre applicazioni particolari delle formole generali esposte nella penultima proposizione, perchè la più importante pel caso nostro che di esse si potrebbe fare, sarebbe

quella trattata partitamente nella proposizione seconda: come pure non espongo le formole generali colle quali si può determinare la posizione della risultante delle pressioni dirette secondo qualunque retta data; giacchè non ci occorrerà bisogno di esse, ed anco perchè chiunque conosca l'ordinaria teorica delle forze parallele potrà con facilità formarsele.

Osservazione IV. Colla scorta delle cose qui esposte si potrà determinare lo sforzo esercitato dall' acqua stagnante contro qualsivoglia porzione piana della scarpa interna di un argine qualunque.

Osservazione V. Generalmente l' acqua che dovrà sostenersi dall' argine non avrà sempre la medesima altezza, e però anco gli sforzi esercitati da essa contro l' argine non saranno in tutti i tempi eguali fra loro: per tanto nella costruzione di un argine, il quale debba sostenere o vincere uno qualunque di questi sforzi, si dovrà avere di mira il massimo di essi quello cioè proveniente dalla maggiore altezza che potrà avere l' acqua che si vorrà sostenere.

Passo ora a parlare dello sforzo che fa l' acqua corrente contro gli ostacoli che sono lambiti da essa.

Proposizione settima. Problema.

Determinare la pressione parziale esercitata da una corrente contro un punto qualunque di una superficie lambita da essa?

Si riferiscano sì i punti della superficie lambita che quelli della corrente in moto a tre assi rettangolari fissati nello spazio: si rappresentino colle x, y, z le coordinate del luogo occupato da un

punto della corrente alla fine del tempo t qualunque; colla P la pressione e colla Δ la densità che hanno luogo nel punto stesso alla fine del medesimo tempo t; colle X, Y, Z tre forze acceleratrici agenti sul punto medesimo, dirette rispettivamente secondo i prolungamenti delle coordinate x, y, z, ed equivalenti a tutte le forze acceleratrici che agiscono su di esso; in fine colle u, v, w le velocità dello stesso punto a seconda dei prolungamenti delle medesime coordinate x, y, z.

È dimostrato in quasi tutti i trattati di Idrodinamica che le quattro funzioni u, v, w, P delle x, y, z, t hanno le proprietà espresse dalle equazioni

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dP}{dx}\right) - X + \left(\frac{du}{dt}\right) + u\left(\frac{du}{dx}\right) + v\left(\frac{du}{dy}\right) + w\left(\frac{du}{dz}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dP}{dy}\right) - Y + \left(\frac{dv}{dt}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right) + v\left(\frac{dv}{dy}\right) + w\left(\frac{dv}{dz}\right) = 0,$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dP}{dz}\right) - Z + \left(\frac{dw}{dt}\right) + u\left(\frac{dw}{dx}\right) + v\left(\frac{dw}{dy}\right) + w\left(\frac{dw}{dz}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{d\Delta}{dt}\right) + \left(\frac{d\Delta u}{dx}\right) + \left(\frac{d\Delta v}{dy}\right) + \left(\frac{d\Delta w}{dz}\right) = 0,$$

e però integrate che fossero queste equazioni si conoscerebbero le velocità u, v, w e la pressione P per un punto qualunque della corrente alla fine del tempo t; indi sostituendo nella funzione delle x, y, z, t che rappresenta la P, così determinata, in luogo delle x, y, z le coordinate analoghe del punto della superficie lambita dalla corrente si otterrebbe la pressione parziale cercata, la cui direzione sarebbe normale alla stessa superficie.

Osservazione I. Se all' acqua corrente non vi saranno frammischiate altre materie, come si è supposto tacitamente nelle proposizioni precedenti, la Δ sarà costante; e la quarta delle esposte equazioni si ridurrà alla seguente

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0.$$

Quando quest' ultima medesima corrente sarà stabilita, la pressione P parziale richiesta nella proposizione sarà affatto indipendente dal tempo. Così, se la pressione stessa sarà la sola forza passiva e la gravità la sola forza attiva, agenti sulle molecole della corrente, disposti i due assi delle x, y orizzontalmente, e quello delle z diretto dall' alto in basso, si avrà $X=0$, $Y=0$, $Z=g$, ove g esprime la stessa gravità; e però le equazioni a svolgersi in questo caso onde avere le u, v, w, P saranno le seguenti

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dP}{dx}\right)+u\left(\frac{du}{dx}\right)+v\left(\frac{du}{dy}\right)+w\left(\frac{du}{dz}\right)=0,$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dP}{dy}\right)+u\left(\frac{dv}{dx}\right)+v\left(\frac{dv}{dy}\right)+w\left(\frac{dv}{dz}\right)=0,$$

$$\frac{1}{\Delta}\left(\frac{dP}{dz}\right)+u\left(\frac{dw}{dx}\right)+v\left(\frac{dw}{dy}\right)+w\left(\frac{dw}{dz}\right)=g,$$

$$\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{dv}{dy}\right)+\left(\frac{dw}{dz}\right)=0,$$

Osservazione II. Se con accuratissime osservazioni si potesse concepire la natura del moto delle particelle di una corrente, con facilità mediante le tre prime equazioni qui esposte evidentemente si potrebbe determinare anco la pressione che interessa in queste ricerche.

Corollario. Evidentemente la somma delle pressioni esercitate alla fine del tempo t dalla corrente contro una data porzione della superficie lambita da essa sarà espressa dall' integrale della differenziale

$$dx\,dy\,P\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}$$

esteso agli estremi della superficie medesima. Così lo sforzo esercitato sulla medesima porzione di superficie, o come si dice comunemente l' urto della corrente, secondo la retta che fa cogli assi delle coordinate x, y, z gli angoli aventi per coseni rispettivamente a, b, c, sarà data dalla espressione

$$a\iint P\,dy\,dz + b\iint P\,dx\,dz + c\iint P\,dx\,dy,$$

purchè i tre integrali si estendano sino agli estremi della superficie stessa.

Integrate che fossero le equazioni sopra esposte non solo si potrebbero ultimare tutte le cose sopra indicate, ma anco determinare la posizione dell' ultima pressione considerata e l' altezza che potrebbe avere la corrente vicino all' argine costruito o da costruirsi; ma siccome sino ad ora si sanno integrare solamente alcuni casi particolari di esse, così stimo utile l' esposizione di ciò che segue.

La linea percorsa dalla più veloce particella di una corrente d' acqua dicesi *filone, spirito* della corrente stessa.

Si chiama poi velocità media di una corrente d' acqua, od anco semplicemente velocità di essa, quella colla quale si dovrebbe movere ogni sua particella a seconda del filone della direzione della corrente stessa perchè passasse per ogni sua sezione la

medesima quantità di acqua che vi passa movendosi ogni particella colla propria effettiva sua velocità.

Se le linee percorse dalle particelle di una corrente sostenuta da un argine saranno pressochè tutte parallele alla linea dell' argine stesso e questa prossimamente rettilinea, lo sforzo laterale esercitato da essa contro l' argine di poco differirà da quello, che sarebbe prodotto da un' acqua stagnante che avesse l'altezza eguale a quella della corrente medesima.

Quando le acque correnti si muovono, come si suol dire, tranquillamente e raccolte dietro le sole scarpe interne degli argini e che le linee loro voltino le concavità verso le acque, gli sforzi totali esercitati da esse correnti contro degli argini medesimi si ritengono da alcuni periti complessivamente in ragione composta diretta delle rispettive sezioni e del quadrato delle velocità, e della inversa dei raggi di curvatura delle linee descritte dalle correnti stesse.

Se poi la direzione dell' acqua corrente dietro la scarpa interna dell' argine farà un angolo sensibile colla linea dell' argine, lo sforzo esercitato da essa contro l' argine per ismoverlo dipenderà dall' altezza che essa avrà vicino all' argine, e dalla direzione e grandezza della sua velocità; giacchè questo sforzo sarà eguale a quello, che essa produrrebbe, se fosse stagnante ed avesse l' altezza della corrente; più quello che essa produrrebbe colla semplice velocità, e che dalla parte esterna vi fosse appoggiata dell'acqua stagnante avente la stessa altezza della corrente medesima.

Noi qui parleremo solamente di questo secondo sforzo, essendo il primo compiutamente conosciuto

in virtù delle cose già dichiarate superiormente; anzi considereremo immediatamente lo sforzo esercitato contro un piano avente una estensione sensibile o finita, e per ora ci appoggieremo interamente alle esperienze, stantechè la teorica colla quale si può determinare questo sforzo è bene che sia preceduta da quella relativa alla misura delle acque correnti la cui esposizione ci allontanerebbe di troppo dallo scopo che abbiamo qui di mira; ed incominceremo dallo sforzo diretto.

Quando la direzione sia perpendicolare ad un piano immerso interamente nella corrente e che esso non ristringa sensibilmente l'ampiezza della medesima, lo sforzo esercitato da questa contro il piano eguaglia prossimamente il peso di un prisma d'acqua avente per base il piano stesso e per altezza quella verticale della quale cadendo liberamente un grave acquisterebbe la velocità dell'acqua corrente.

Questa importantissima verità fu scoperta dai signori Alembert, Condorcet, e Bossut mediante una lunga serie di delicate sperienze istituite per ordine ed a spesa del Governo di Francia.

I medesimi tre autori e particolarmente il benemerito sig. Bossut, presentando successivamente ad una stessa corrente una medesima superficie piana verticalmente, che facesse colla direzione della corrente successivamente gli angoli di incidenza eguali a 6°, 12°, 18°, 24°, 30°, 36°, 42°, 48°, 54°, 60°, 66°, 72°, 78°, 84°, 90°, trovarono gli sforzi corrispondenti esprimibili dai numeri seguenti 3999, 4063, 4142, 4240, 4404, 4800, 5433, 6148, 6925, 7710, 8446, 9084, 9578, 9893, 10000; dimodochè indicando

con U lo sforzo diretto, il quale si sa ora determinare, gli sforzi che avranno luogo, quando la corrente farà colla superficie gli angoli sopra esposti saranno espressi, come è facile a dimostrarsi, dai prodotti

$(0,3999)\,U$, $(0,4065)\,U$, $(0,4142)\,U$, $(0,4240)\,U$, ecc.

Conoscendosi ora gli sforzi che hanno luogo quando gli angoli di incidenza sono gli anzi esposti, si potranno trovare con una approssimazione sufficiente per la pratica quelli che avrebbero luogo per qualunque altro angolo di incidenza, facendo sulle misure degli sforzi anzi esposte delle operazioni affatto analoghe a quelle che si fanno ordinariamente sui logaritmi dei numeri interi per trovare i logaritmi dei numeri frazionarj.

Si potrebbero anco stabilire empiricamente alcune funzioni dell'angolo d'incidenza, le quali comprendessero i risultamenti particolari qui sopra esposti, come già fecero altri, e desumere da esse gli sforzi per qualunque angolo d'incidenza, come pure i loro centri o delle resistenze corrispondenti, ed anco prossimamente gli sforzi esercitati contro alle superficie curve; ma pel caso nostro per determinare lo sforzo contro di una superficie piana, qualunque sia per essere l'angolo d'incidenza, sarà meglio usare la regola anzi esposta; più supporre il centro di resistenza nello stesso centro di gravità della superficie medesima: e per le superficie curve, supporle equivalenti a certe superficie piane, che ogni caso particolare facilmente suggerirà.

S'indichino colle A, A' le aree di due superficie piane situate verticalmente in due diverse correnti

e similmente inclinate rispetto alle direzioni di queste, colle v, v' le velocità delle correnti stesse, colle s, s' le altezze a cui sono dovute queste velocità; e colle U, U' s'indichino le grandezze degli sforzi esercitati contro le medesime superficie; e si ritenga indicato colla G il peso specifico dell'acqua, e colla g si esprima la forza di gravità.

Pei risultamenti qui esposti sarà

$$U = cGAs \text{, ed } U' = cGA's';$$

ove c esprime una costante che dipenderà dalla inclinazione delle correnti alle superficie incontrate; ma pel moto uniformemente accelerato si ha $s = \frac{v^2}{2g}$, $s' = \frac{v'^2}{2g}$; adunque si avrà $U = \frac{cG}{2g} \cdot Av^2$, ed $U' = \frac{cG}{2g} \cdot A'v'^2$; e per tanto $U : U' = Av^2 : A'v'^2$. Vale a dire gli sforzi stanno fra loro in ragione composta delle aree delle superficie e dei quadrati delle velocità delle correnti urtanti stesse.

Se fosse $A = A'$, ovvero $v = v'$, si avrebbe,
pel primo caso $U : U' = v^2 : v'^2$;
e pel secondo caso $U : U' = A : A'$;
cioè gli sforzi, come i quadrati delle velocità, quando fossero eguali fra loro le aree delle superficie; e come le stesse aree, quando fossero eguali le velocità delle correnti.

Quando il picciol piano esposto, come sopra si è detto, all'azione della corrente non sarà investito posteriormente da altr'acqua, unendo lo sforzo superiormente determinato alla semplice pressione, che sarebbe cagionata dalla stessa acqua se fosse stagnante, si otterrà prossimamente lo sforzo totale eserci-

tato dalla corrente perpendicolarmente contro di esso piano. Le cose qui esposte ci insegnano quanto sia grande il pericolo di essere sportati quei corpi uniti agli argini e sporgenti nelle correnti, come pure c' insegnano a valutare almeno per approssimazione l' effetto tristo che possono produrre le onde, le sbataizze, e le scosse che ricevono le imposte delle bocche d' acque allorchè si chiudano le porte con prestezza.

Dalle medesime cose esposte si comprende quanta parte abbiano sullo sforzo esercitato dall' acqua contro gli ostacoli opposti alla sua espansione, sì la sua altezza, che la direzione e grandezza della velocità, se essa sia corrente; per tanto passerò ora a considerare quei mezzi coi quali si potrà argomentare almeno prossimamente tanto l' altezza dell' acqua, quanto la direzione e grandezza della velocità di quelle correnti, le quali dovransi sostenere dall' argine quando sarà costruito; e ciò onde dare a questo le dimensioni necessarie, perchè esso non si costruisca inutilmente.

Procurisi una Mappa del luogo ove si dovrà costruire l'argine e dei luoghi circostanti, nella quale vi siano segnati: il letto del fiume od il catino dal quale sortiranno le acque da sostenersi, e particolarmente le linee indicanti i filoni dell' acqua sì in istato di magra che di piena, ed anco le velocità rispettive, quando essa sia corrente; alcune sezioni del fiume medesimo fatte a fianco del luogo dove si dovrà erigere l' argine; le situazioni degli Idrometri locali alle quali siano uniti i rispettivi registri delle altezze a cui arrivarono le acque nelle piene princi-

pali; le valli e però le alture delle campagne prossime determinate con opportune livellazioni; i canali attraversanti le medesime particolarmente i tributarj del fiume o del catino anzidetto; in ultimo le muraglie, i boschi, le file di piante, e le vigne. Ottenuto ciò, si faccia uno studio particolare per iscoprire qual parte potrà avere ciascuna di queste cause nell' altezza dell' acqua, e nelle direzioni e grandezze delle velocità, se sia corrente, avuto riguardo all' effetto risultante della loro combinazione insieme a quello che probabilmente produrrà l' ostacolo ossia il corpo dell' argine allorchè sarà costruito; onde determinare le medesime tre cose per qualunque punto dell' acqua che sarà tenuta a segno dal medesimo ostacolo.

Fra le cause suddette che si dovranno aver presenti, perchè lo studio qui suggerito riesca proficuo, una delle principali si è che l' acqua tende sempre a moversi sul piano della campagna secondo la linea della massima pendenza od inclinazione coll' orizzonte.

Di fatto, la forza che spinge l' acqua al moto è la gravità; anzi decomposta questa in due, una perpendicolare al piano sul quale l' acqua è obbligata a moversi, e l' altra a seconda del medesimo, questa seconda componente è l' unica parte della gravità che animi l' acqua nel primo istante a moversi; giacchè l' altra sua componente, essendo perpendicolare al piano sul quale essa si deve movere, non fa che premerla contro il piano medesimo. Ma allorchè un corpo è mosso dalla quiete anco da una forza acceleratrice, esso nel primo istante del suo moversi segue la direzione di questa forza; l' acqua adunque seguirà la direzione di quella delle due anzidette componenti della gravità che è nel piano sul

quale si deve essa movere. Per tanto, siccome questa componente è nel piano della gravità e dell' altra componente della stessa gravità, e conseguentemente in un piano verticale perpendicolare al piano sul quale deve scorrere l' acqua, così la direzione del moto dell' acqua nel piano di esso sarà la retta comune a questi due piani, la quale per siffatte proprietà è come si sa, la retta più inclinata all' orizzonte fra le infinite che si possono tirare dal punto di partenza dell'acqua e nel piano sul quale essa deve scorrere. Come abbiamo asserito.

Anzi, se il moto dell' acqua sul detto piano fosse sì lento cha pullulasse sul medesimo essa continuerebbe a moversi a seconda della suddetta retta; se poi essa incominciasse a moversi in esso piano con velocità finita, descriverebbe almeno nel principio del suo moto un arco parabolico, che avrebbe per diametro la linea della massima pendenza condotta pel punto di sua partenza, e per tangente la direzione primitiva del moto stesso; in generale però essa anderà sempre accostandosi alla linea della massima pendenza, qualunque sia la superficie su cui si mova, e la direzione della sua velocità primitiva.

Le muraglie, i boschi folti, le vigne buone, gli argini, ecc. producono dei rigurgiti od insaccamenti d' acqua la cui estensione non si può assegnare, solo si può dire che essi rigurgiti dipenderanno dalla maggiore o minore velocità dell' acqua corrente che comprimerà l' acqua dormiente contro di essi ostacoli, e dallo sfogo più o meno libero che avrà inferiormente il corso delle acque stesse.

Con questo studio essenziale per chi deve progettare un argine si concepirà prossimamente qual direzione e velocità ed altezza saranno per aver le acque a sostenersi dal nuovo argine, ed anco se esse saranno cause perenni ovvero momentanee, come pure se esse potranno per avventura cessare, e se ne potranno sorgere delle nuove; come accaderebbe effettivamente se potesse avvenire la corrosione di qualche vecchio argine od altura ecc., situato superiormente al luogo dell' argine a costruirsi.

Sebbene collo studio sopra indicato il giovane istruito sì nelle teoriche che nelle pratiche operazioni di tal natura potrà coucepire, almeno per approssimazioue, le direzioui e le velocità delle correnti, ed anco le rispettive altezze, nulladimeno, quando le circostanze glielo permetteranno sarà bene che esso non risparmi di andare nel tempo di una piena sul luogo, dove si dovrà erigere l' argine, ed ivi osservare egli medesimo l' effettiva altezza dell' acqua e la direzione e grandezza della velocità di ogni corrente; in caso diverso, cioè quando non potrà fare questa visita nel tempo di una piena, procuri di andarvi subito dopo la medesima ed osservare da qual parte l' acqua avrà piegate nei differenti luoghi i fusti delle piccole piante, e gli steli delle erbe più alte, come pure in che modo saranno disposte le radici ed i rami accavallate ai fusti delle piante dalla corrente dell' acqua, e i differenti colori che avranno i fusti delle piante di grosso fusto, i mucchi di terra fatti qua e là dalle acque stesse: che dalla parte verso cui saranno piegate le piante, e gli steli delle erbe, e le radici accavallate ai fusti

potrà argomentare le direzioni delle correnti; e dalla grossezza dei fusti piegati e dei mucchi di terra formati, potrà desumere le grandezze delle rispettive velocità; in fine dai differenti colori dei fusti, che non si saranno piegati, dagli idrometri locali ed anco dalla fresca memoria delle persone circostanti potrà avere l'altezza che avranno avute le acque nella piena appena avvenuta. Quindi si formerà una idea e della direzione e grandezza delle velocità delle differenti correnti, ed anco delle altezze a cui sarà giunta l' acqua nei diversi luoghi della traccia dell' argine, come pure quali variazioni potranno avvenire per esse in forza dell' argine a costruirsi.

Se tutte queste ultime osservazioni o meglio questi fatti relativi all' altezza dell' acqua, alla direzione del corso di ogni corrente di essa, ed alle velocità rispettive di queste, si accorderanno coi preveduti mediante lo studio essenziale delle cause sopra nominate, si potrà con ragione dire che essi saranno effettivamente quelli che avranno luogo.

Trovate le direzioni e grandezze delle velocità e le altezze che probabilmente avrà l'acqua, quando sarà costruito l' argine, colle regole esposte superiormente si potrà determinare, almeno prossimamente, lo sforzo che essa sarà per fare contro l' argine costruito.

Alcuni pratici per trovare l' intero sforzo che fa l' acqua corrente contro un argine prescindono dalla considerazione dell' urto che avrebbe luogo e calcolano in vece la pressione che l' acqua eserciterebbe contro il medesimo supponendo l' altezza dell' acqua eguale a quella che è effettivamente, più una frazione di essa altezza: questa frazione comunemente

è un quarto. Questa pratica non è da biasimarsi, giacchè succede quasi sempre, che fra la scarpa dell' argine e l' acqua sensibilmente in moto vi è una massa d' acqua morta ossia con insensibile velocità, la quale si alza e si abbassa a misura che aumenta o diminuisce la velocità dell' acqua che la spinge contro l'argine e la cui pressione è in questo caso l' unico effetto dell' acqua, che abbia luogo sulla scarpa dell' argine; però, se questa pratica non è biasimevole richiede per altro molta circospezione la scelta della frazione dell' altezza da aggiungersi all' altezza effettiva dell' acqua stessa corrente, affine di non allontanarsi troppo dallo scopo che si ha di mira.

Finirò di parlare dello sforzo che fanno le acque contro degli ostacoli che si oppongono alla loro espansione e particolarmente contro le scarpe degli argini, coll' esporre una massima inculcata caldamente da tutti i più intelligenti d' arginature, cioè che nella costruzione di un argine sarà sempre bene il supporre lo sforzo delle acque che esso dovrà sostenere maggiore di quello che daranno preventivamente alla costruzione i calcoli e le osservazioni combinate, senza però eccedere eccessivamente io soggiungo.

PARTE SECONDA.

Delle dimensioni dei profili di un argine.

Comunemente i profili di un argine sono quadrilateri rettilinei, i quali hanno un lato orizzontale, due lati egualmente inclinati all' orizzonte ed il quarto la cui inclinazione rispetto all'orizzonte varia col variare la inclinazione della superficie del terreno che serve di base all' argine stesso. Noi incominceremo a supporre, come ha luogo generalmente, che ogni profilo di un nuovo argine consista in un trapezio ordinario, avente i lati paralleli orizzontali; per cui la determinazione di questi profili si ridurrà a quella di altrettanti trapezj di questa forma. Nel seguito poscia estenderemo le indagini alla ricerca delle dimensioni di qualunque profilo.

Sono molte le cose che si potrebbero determinare per conoscere un siffatto profilo: noi determineremo immediatamente quelle, le quali oltre che sono sufficienti per individuarlo, sono nel medesimo tempo proprietà essenziali per esso profilo. Vale a dire, determineremo da prima l' altezza del profilo, indi la pendenza di ogni scarpa, e la lunghezza del suo lato superiore, il quale indica la larghezza del piano dell' argine.

Dell' altezza dei profili.

Nel determinare l' altezza di un profilo di un nuovo argine, bisognerà aver riguardo particolar-

mente alle tre cose seguenti, cioè: all'altezza che potrà avere l'acqua nelle massime piene in quel punto stesso, dove l'argine dovrà avere il profilo cercato: alla diminuzione o calo, che soffrirà naturalmente l'altezza dell'argine nuovo nello assodarsi; ed alla eccedenza, che dovrà avere l'altezza dell'argine, già assodato, sulla maggiore altezza che potranno avere le acque a sostenersi da esso medesimo.

La diminuzione che soffre l'altezza di un argine nello stabilirsi dipende dalla qualità della terra e dall'esser la medesima più o meno stritolata e pestata; da alcune osservazioni è risultato che per gli argini ordinari questa diminuzione si può ritenere prossimamente eguale ad un ottavo dell'altezza del nuovo argine. Dimodochè, un argine nuovo od ogni suo profilo dovrà farsi di una tale altezza, che diminuita di un suo ottavo, dia quella che esso dovrà avere, quando sarà stabilito.

L'altezza di un argine stabilito è bene che superi la massima altezza che potranno avere le acque da sostenersi da esso medesimo; affinchè le acque agitate dai venti non siano con troppa facilità spinte sul piano o sul cappello dell'argine, anco nei casi della loro maggiore altezza, ciò che non avverrebbe senza grave danno dell'argine stesso, anzi con pericolo di rottura.

Qui pure si può ritenere il valore medio dell'eccesso dell'altezza dell'argine stabilito sulla massima altezza a cui può arrivare l'acqua a sostenersi da esso, prossimamente eguale a sessanta centimetri; talchè l'altezza di ogni profilo dell'argine stabilito dovrà superare di sessanta centimetri quella alla

quale potranno arrivare le acque nelle maggiori piene nei luoghi dei profili medesimi.

Colle cose qui dichiarate, conoscendosi l' altezza, che avrà l'acqua nella maggior piena in un dato punto della traccia dell' argine, potremo scoprire l' altezza del profilo del nuovo argine, corrispondente al medesimo punto della sua traccia; cioè potremo sciogliere il seguente problema.

Proposizione prima. PROBLEMA.

Data la maggior altezza che potrà avere l' acqua a sostenersi in un dato punto della traccia di un argine; trovare l' altezza del suo profilo corrispondente?

Si chiami a l' altezza dell' acqua, ed x quella del profilo del nuovo argine, misurate entrambe col metro.

Sarà tanto $x-\frac{1}{8}x$, quanto $a+\frac{60}{100}$ l' altezza che dovrà aver l' argine stabilito; e però

$$x-\tfrac{1}{8}x=a+0{,}60, \quad \text{ossia} \quad \tfrac{7}{8}x=a+0{,}60.$$

Quindi sarà $x=\frac{8}{7}(a+0{,}60)$. Vale a dire, l'altezza di ogni profilo del nuovo argine dovrà eguagliare otto settimi, della corrispondente maggiore altezza dell' acqua a sostenersi accresciuta di sessanta centimetri.

Osservazione I. Se la diminuzione dell' altezza di un argine coll' assodarsi fosse la n esima parte di quell' altezza, che esso ha appena costruito, ed il medesimo stabilito dovesse avere un' altezza, che sorpassase di s quella dell' acqua della maggior piena a sostenersi, e quest' ultima altezza fosse a come dianzi, si troverebbe colle stesse regole usate supe-

riormente, l'altezza necessaria pel nuovo argine o pel suo profilo eguale ad $\frac{n}{n-1}(a+s)$. Per gli attuali regolamenti degli argini in Lombardia dev' essere $s=0,80$, cioè ad ottanta centimetri.

Osservazione II. Nel determinare l'altezza di ogni profilo di un nuovo argine, oltre le tre cose dichiarate sopra, le quali sono le principali, sarà bene che si abbiano presenti anco le seguenti, cioè; che il piano dell' argine stabilito dovrà essere parallelo al pelo che avrà l'acqua a sostenersi da esso, quando questa avrà la maggior altezza, per cui esso piano dovrà essere orizzontale nel solo caso che risulti orizzontale il pelo medesimo: che, allorchè lo sbocco di un fiume sarà libero, per cui vi sarà una specie di chiamata d' acqua, ivi l' argine potrà esser meno alto che altrove; e che all'opposto dovrà essere più alto qualora possa succedere qualche rigurgito od un insaccamento d' acqua, od un ventre nel fiume che conduce le acque da sostenersi, come pure a fronte delle corrosioni e questo per le agitazioni solite ad avvenire in questi luoghi. Così in vicinanza dei caseggiati, siano essi dentro ovvero fuori della linea dell' argine, sarà ottima cosa l'abbondare nell' altezza dell' argine nuovo, non solo pel grave pericolo al quale sono i medesimi esposti nel caso che le acque tracimino l' argine di fronte ad essi, ma ancora, perchè vicino agli abitati gli argini si abbassano continuamente più che altrove, stantechè sono essi in questi luoghi continuamente calpestati per cui vengono spolverizzate le parti e però con somma facilità trasportate via dai venti: un simil riguardo si dovrà

avere anco pei tronchi d' argini destinati ad uso di strade. In fine, dove vi saranno altri argini di altezze già sperimentate sufficienti per sostenere le maggiori piene, e che l' argine a costruirsi debba sostenere le stesse acque da quelli sostenute, sarà bene desumere l' altezza, che esso dovrà avere, quando sarà assodato, dalle altezze di quelli medesimi.

Similmente, quando il profilo sia per un semplice nuovo tronco d' argine, è bene avere molto riguardo alla diminuzione o calo che potrà subire l' altezza di esso per l' assettamento; affinchè questo tronco non riesca dopo il suo assettamento meno alto del vecchio; come pure bisognerà ricordarsi, che per un argine, che debba unirsi od impigliarsi ad altri, vicino a questi almeno, sarebbe inutile affatto affatto un'altezza maggiore di quella di questi altri medesimi; in ultimo, che se la base dell'argine, cioè il terreno sul quale si deve esso fabbricare sarà cueroso o pantanoso o coperto d'acque, particolarmente se paludoso si deve abbondare nell' altezza di esso, e però anco in quelle dei corrispondenti profili.

Osservazione III. Determinate colle cose qui sopra esposte le altezze dei profili più interessanti, per facilità si potranno determinare quelle degli intermedj come si fa comunemente, cioè con opportune livellazioni o graficamente qualora già si abbia la livellazione della traccia dell' argine.

Della inclinazione che debbono avere le scarpe di un argine coll' orizzonte.

Nel determinare la inclinazione che debbono avere le scarpe di un argine coll' orizzonte bisognerà avere

di mira la qualità della terra colla quale si dovrà esso formare, e la stabilità che al medesimo si potrà procacciare colle inclinazioni medesime. Incominciaremo a parlare di questa inclinazione avendo riguardo alla sola qualità della terra, cioè prescindendo per ora dalla fermezza che si può procacciare all'argine medesimo mediante la più o meno grande inclinazione delle scarpe coll'orizzonte.

Se sopra due o più rettangoli orizzontali si costituiscono i massimi mucchi formabili con terre della medesima qualità, asciutte e bene stritolate, le facce laterali di questi mucchi risulteranno anch'esse piane, e tutte egualmente inclinate coll'orizzonte. L'angolo che fa una faccia qualunque laterale di uno di cosiffatti mucchi colla base del mucchio stesso, è quello che chiamasi comunemente *angolo di equilibrio* della terra costituente il mucchio medesimo. Quest'angolo per le terre sabbiose è di circa trenta gradi, per le argillose di trentasei, e per le altre è intermedio fra questi due, come fu osservato dai signori Coulomb, Delanges, Gothey, ecc.

Così, se sopra una figura orizzontale avente un contorno qualunque, si farà il massimo mucchio formabile con una terra asciutta e bene stritolata, la superficie laterale del medesimo sarà conformata in tal guisa, che essa si potrà generare da una retta, che scorre lungo il contorno della base, ed abbia costantemente una inclinazione coll'orizzonte eguale all'angolo di equilibrio della terra colla quale è fatto il mucchio stesso: questo è un risultamento non rigoroso, ma sufficientemente prossimo al vero per la pratica.

L'inclinazione che ha coll'orizzonte il piano tangente la superficie esteriore di un mucchio di terra costituito sopra qualunque base, sia o non sia il massimo dei mucchi, che si possono formare colla stessa terra e sulla medesima base, indica la inclinazione di quella parte della scarpa di esso mucchio, che è al contatto del piano stesso.

Quando il mucchio suddetto sia il massimo fra i formabili colla stessa terra e sulla medesima sua base, il piano tangente ad un punto della superficie esteriore, tocca la superficie stessa per tutta l'estensione di una retta, la cui inclinazione coll'orizzonte è lo stesso angolo di equilibrio della terra costituente il mucchio medesimo.

Ora, se alla terra costituente il massimo mucchio formabile con essa su di una data base, si volesse unire o sovrapporre altra terra della medesima qualità, questa scorrerebbe o franerebbe giù dalla scarpa del mucchio stesso. Concludiamo per tanto, che l'angolo d'inclinazione di ogni scarpa di un argine coll'orizzonte non dovrà giammai essere maggiore dell'angolo di equilibrio della terra costituente il medesimo; altrimenti asciugandosi e stritolandosi per qualche accidente la terra colla quale esso sarà formato, questa franerà con grave danno dell'argine medesimo; anzi potrebbe anco succedere che si staccassero alcune sue parti dalle altre e con ciò si scompaginasse in modo di rendersi insufficiente a soddisfare lo scopo per cui si fosse costruito.

Varie sono le regole che usano comunemente i pratici per indicare la inclinazione coll'orizzonte di un piano comunque situato nello spazio; qui esporremo quelle che alla semplicità riuniscono l'esattezza.

Da un punto del piano dato si immaginino condotte due rette, cioè la verticale e quella, fra le situate in esso piano, che ha la massima inclinazione coll'orizzonte; ed uniscansi i due punti ove queste due rette incontrano un medesimo piano orizzontale sottoposto al dato; e si avrà un triangolo rettangolo il cui angolo acuto opposto al lato verticale sarà l'angolo d'inclinazione del piano coll'orizzonte; e però indicandosi le misure di due lati di un siffato triangolo, implicitamente resterà indicata l'inclinazione del piano coll'orizzonte: questa è la regola che si usa comunemente.

Alcuni pratici però fanno uso di uno strumento simile a quello, che usano gli artiglieri per determinare l'angolo fatto dall'asse del mortajo coll'orizzonte: questo semplicissimo strumento è composto di tre aste DE, DH, EF (fig. 4), unite l'una all'altra ad angolo retto, di un quadrante circolare DF e di un picciol pendolo EG, che ha il punto di sospensione nel centro del quadrante stesso, il qual quadrante è diviso dall'arco rs in due parti egualmente larghe, nelle quali vi sono scritti dei numeri, fra i quali quelli che sono in una indicono i gradi degli angoli analoghi all' roG, e quelli che sono nell'altra esprimono le cotangenti dei medesimi angoli, e si trova con esso l'angolo che vien fatto coll'orizzonte da un piano o da nna scarpa di un argine, ed anco la cotangente del medesimo angolo la quale esprime il rapporto che ha la così detta base della scarpa colla corrispondente altezza dell'argine.

Il triangolo rettangolo di cui si è parlato dianzi sia espresso dall' ABC. Collocato lo strumento per

modo che l'asta DH sia posta sulla ipotenusa, ed il piano del quadrante verticale, appunto come si vede nella figura, l'arco intercetto fra l'asta DE ed il filo verticale EG, eguaglierà l'angolo della inclinazione cercata; giacchè gli angoli GED, ABC, sono fra loro eguali, essendo entrambi complementi del medesimo angolo tnB. Quindi quei due numeri fra gli scritti sull' asta DE, che sono sottoposti al filo oG, od i più prossimi ad esso fra gli analoghi, indicheranno, l'uno la misura in gradi dell'angolo ABC, e l'altro il rapporto che ha la BC alla AC, cioè la base della scarpa dell'argine colla corrispondente altezza del medesimo.

Stante l'ordine, che ho stabilito superiormente, dovrei ora parlare della inclinazione delle scarpe dell'argine coll'orizzonte, avendo di mira la sua fermezza; ma siccome la fermezza di un argine dipende anco dalla larghezza del suo piano; pertanto ho divisato di parlare e di questa inclinazione delle scarpe, e della larghezza del piano, vale a dire, di trattare simultaneamente di tutte quelle dimensioni del profilo di un argine nella determinazione delle quali si deve aver di mira particolarmente la stabilità o fermezza dell'argine stesso.

Nel trattare di queste dimensioni converrebbe distinguere due casi, quello cioè delle acque stagnanti e quello delle correnti; ma per ciò che si è detto parlando dello sforzo che fanno le acque per espandersi, e per quello che diremo parlando della traccia di un argine, cioè che un argine rarissime volte si troverà soggetto all'urto delle correnti, mi limiterò a parlare con tutta l'estensione desiderabile della

grandezza che debbano avere i suddetti elementi dei profili di un argine, affinchè esso sia atto ad equilibrare lo sforzo che possono fare le acque stagnanti contro di esso; e solo di tempo in tempo dirò, come si dovranno variare questi elementi, perchè l'argine sia atto ad equilibrare lo sforzo di una corrente; come pure in qual maniera si debbano variare i medesimi elementi, per aumentare la forza dell'argine, onde all'uopo procacciare al medesimo la stabilità.

Prima però di entrare in materia, farò qui precedere alcune riflessioni che facilitano la dichiarazione di essa, la quale è senza dubbio una delle parti più importanti delle cose, che si svolgono in questo Trattato.

Un argine formato di terra, che sostenga la pressione delle acque appoggiate ad una sua scarpa, è soggetto alle azioni di varie cause, le une tendenti a spostarlo od anco a scompaginarlo, e le altre all'opposto tendenti a conservarlo nella sua posizione ed integrità. Il peso delle terre, di cui l'argine è composto, eserciterebbe delle pressioni, che sarebbero interamente dirette alla rovina di esso, se altre proprietà delle terre non le rivolgessero in tutto o almeno in parte alla conservazione del medesimo. Similmente, le acque tenute a segno dall'argine possono esse pure esercitare azioni tendenti in parte alla rovina dell'argine ed in parte alla sua conservazione. La tenacità o l'adesione con cui le particelle della terra si tengono le une alle altre avvinte, concorrerebbe costantemente ed unicamente a conservare l'argine nello stato suo d'integrità, e meriterebbe per questo sommo riguardo, quando se ne potesse far conto. Ma sgra-

ziatamente questa tenacità, non solo si scorge sommamente diversa passando dall'una all'altra terra, ma anche attenendosi ad una medesima, le variazioni a cui va essa soggetta, sono tali e tante che avvilir possono il più intrepido calcolatore, che s' invogliasse di sottoporla a calcolo, ove fabbricare non si vogliono castelli in area o romanzi matematici. Il perchè conveniente cosa si è creduto da saggi uomini, il non dovere tener conto in riguardo a fermezza d'argini di terra, ed hanno invece rivolta la loro attenzione a indagare le leggi e le norme con cui sostruire gli argini di maniera, che atti siano a sostenersi contro le pressioni delle acque stagnanti o correnti al lungo di essi, anco col prescindere da ogni influsso di tenacità dovuto alle terre colle quali si compongono, dal che anzi non ne potrà derivare che maggiore sicurezza alla loro stabilità.

Ma, se si prescinde dalla tenacità delle terre componenti l'argine, trascurare per altro non si può un' altra causa non per anco annoverata, quale è la difficoltà che le terre debbono opporre, allorchè una loro porzione abbia a scorrere sovra di un'altra; ciò che costituisce il così detto *attrito*, il quale pure similmente, che la tenacità, non può influire che alla conservazione dell'argine.

Allorchè dalla combinazione di tutte queste cause ne emerge preponderanza nell' effetto di quelle tendenti a conservare ogni parte dell'argine nello stato suo, sopra l'effetto delle altre tendenti allo spostamento della medesima, in tal caso si dice che l'argine ha *stabilità*; che se gli effetti opposti non sono che eguali, lo stato dell'argine è quello di *equilibrio*.

Varj sono gli autori che si occuparono di questa materia, fra i quali vogliono specialmente annoverarsi i signori Bossut, Viallet, Prony, e Venturoli; ma dove questi si accontentarono di stabilire le dimensioni dell'argine di maniera che esso non potesse rompersi per sezioni orizzontali, io procurerò di stabilirle per modo che l'argine stesso non possa rompersi per niun verso; vale a dire per modo che esse dimensioni atte siano a rendere stabili tutte quelle porzioni dell'argine medesimo, che sono sovra a qualsivogliono sezioni dell'argine stesso parallele alla sua lunghezza. Siccome poi una qualunque di queste porzioni, assolutamente non si può staccare dalla rimanente dell'argine, qualora essa non possa *sdrucciolare* sulla sua base nè *ribaltare* intorno al lato esteriore ovvero all'interno di questa base medesima; così le dimensioni necessarie per l'argine, affinchè esso non possa rompersi per nessun verso saranno quelle, che renderanno impossibili i movimenti delle suddette sue porzioni. Queste ultime dimensioni, la cui ricerca forma lo scopo principale della parte presente ci renderanno manifesto, che un argine può cadere in rovina, malgrado che siasi rimosso ogni pericolo di rottura, che potesse aver luogo per sezioni orizzontali.

L'ordine generale che io terrò nell'esporre questa importantissima materia sarà il seguente. Nelle prime quattro proposizioni farò conoscere ciò che di più importante fu pubblicato sino ad ora sulla stabilità degli argini di forma ordinaria e costituiti con terra; nelle quindici seguenti completerò la teorica della stabilità dei medesimi argini; e nelle ultime sei parlerò brevemente degli argini non comuni, e deter-

minerò la maggiore porzione di terra, che si potrebbe staccare dalla parte interna di un argine comune, allorchè ad esso si appoggia dell' acqua stagnante, che arriva sino al suo ciglio interno, senza porre il medesimo in pericolo di rottura, almeno prima del ritiro dell' acqua medesima; ciò che servirà per conoscere lo stato minimo di fermezza a cui per disavventura potrà essere ridotto un argine quando ad esso si appoggi l' acqua.

Finalmente prevengo che si avranno bensì di mira particolarmente gli argini formati con terra sciolta, ma che varie proposizioni generali si potranno estendere agli argini formati con qualunque altra materia uniforme dotata anche di tenacità; e che per semplicità contemplerò anch' io un tronco ordinario d' argine comune, e supporrò la sua lunghezza eguale alla unità lineare; e che indicherò il tronco stesso ed anco una qualunque delle suddette sue porzioni, nominando solamente i rispettivi profili, cioè le loro sezioni perpendicolari alle rispettive lunghezze. Per esempio, onde indicare il tronco d' argine, che ha per profilo il trapezio *ABCD* (fig. 6), e la lunghezza eguale alla unità lineare, dirò l' argine o il tronco *ABCD*; così per indicare quella porzione del tronco stesso, la quale ha per uno dei profili estremi il quadrilatero *ABCE*, e la stessa anzidetta lunghezza, scriverò la *porzione d' argine ABCE*, ed anco semplicemente la *porzione ABCE*.

Similmente a scanso di equivoco, stimo bene di avvertire, che, se una scarpa farà coll' orizzonte un angolo maggiore di quello fatto da un' altra, dirò essa inclinata all' orizzonte più di quest' altra, ovvero

dirò la sua inclinazione coll'orizzonte maggiore di quella di quest'altra medesima. Ciò premesso passo alla

Proposizione sesta. Problema.

Conoscendosi l'altezza dell'acqua e la qualità della terra colla quale si vuole costruire un argine; trovare la larghezza che deve avere il suo piano, e le inclinazioni di ogni sua scarpa, perchè esso sia almeno sufficiente ad equilibrare lo sforzo o spinta orizzontale dell'acqua stessa; vale a dire, affinchè non possa aver luogo il moto progressivo o di traslazione sul piano della campagna esterna?

Il profilo dell' argine sia indicato dal trapezio $ABCD$ (fig. 5) che ha i due lati AD, BC orizzontali; e gli angoli BAD, CDA fra loro eguali; ed il pelo dell'acqua dalla LM; e le altezze dell'argine e dell'acqua dalle verticali CP, LN.

Si ponga $LN=a$, $CP=b$; e si nomini g il peso specifico della terra colla quale si deve formare l'argine riferito a quello dell'acqua a sostenersi preso per unità; f il coefficente dell'attrito della terra, cioè quel numero, pel quale moltiplicando il peso della terra si ottiene l'attrito cagionato da essa; y la BC larghezza del piano dell'argine, ed x la cotangente dell'angolo CDA d'inclinazione di ogni sua scarpa coll'orizzonte.

Essendo il volume del tronco d' argine $ABCD$ eguale ad $\frac{1}{2}CP(AD+BC)=\frac{1}{2}b(2y+2bx)$; e però il suo peso ad $(y+bx)bg$, e la pressione esercitata verticalmente dall'acqua sulla scarpa interna eguale ad $\frac{1}{2}a^2x$, come risulta dalla proposizione quarta della parte precedente; la resistenza opposta dall' argine col suo attrito sulla base, sarà espressa da

$$bgf(y+bx)+\frac{1}{2}a^2xf.$$

Così la spinta orizzontale fatta dall'acqua contro il medesimo tronco si troverà col corollario primo della proposizione quarta della parte precedente eguale ad $\frac{1}{2}a^2$. Quindi, affinchè l'argine sia atto almeno ad equilibrare la spinta orizzontale, che sarà prodotta dall'acqua, dovrà essere

$$bfgy + b^2fgx + \tfrac{1}{2}a^2fx = \tfrac{1}{2}a^2.$$

Nella quistione nunciata vi sono due incognite x ed y, ed essa dà una sola equazione, sarà per conseguenza indeterminata. E per tanto nella determinazione o ricerca del profilo di un argine atto ad equilibrare la spinta dell'acqua avente una data altezza, si potrà comprendere fra i dati anco la larghezza del piano, ovvero la inclinazione di ogni scarpa e determinare opportunamente l'altra di queste due quantità.

Corollario. Se si renderà

$$bfgy + b^2fgx + \tfrac{1}{2}a^2fx > \tfrac{1}{2}a^2,$$

l'argine sarà evidentemente stabile, almeno rispetto al moto progressivo di cui si parla.

Proposizione settima. Problema.

Conoscendosi l'altezza dell'acqua e la qualità della terra colla quale si dovrà formare l'argine; determinare come nella precedente proposizione, la larghezza del piano e la inclinazione di ogni scarpa del medesimo, perchè esso non venga ribaltato intorno al lato esteriore dalla sua base?

Ritenute la figura e le denominazioni usate per la proposizione precedente, si trova il momento del peso dell' argine rispetto al punto A eguale a

$g(y+bx)\,b(\frac{1}{2}y+bx)$; e quello della spinta verticale dell'acqua eguale ad $\frac{1}{2}a^2x(y+2bx-\frac{1}{3}ax)$. Similmente, per essere la compouente orizzontale della pressione dell'acqua eguale ad una metà di a^2, e la verticale calata dal suo punto di applicazione sulla base eguale ad $\frac{1}{3}a$, il momento di questa componente rispetto al punto A, che è l'unica forza che si diriga per ribaltare l'argine, risulterà $\frac{1}{6}a^3$. Quindi affinchè vi sia almeno equilibrio dovrà essere

$$bg(bx+y)(bx+\frac{1}{2}y)+\frac{1}{2}a^2x(2bx+y-\frac{1}{3}ax)=\frac{1}{6}a^3.$$

Anco questa proposizione è indeterminata, come l'antecedente precisamente; e però si dica di essa, ciò che si è detto di quella.

Corollario. Se si renderà la quantità

$$bg(bx+y)(bx+\frac{1}{3}y)+\frac{1}{2}a^2x(2bx+y-\frac{1}{3}ax)$$

maggiore di $\frac{1}{6}a^3$, l'argine sarà stabile rispetto al moto di rotazione di cui si tratta.

Osservazione I. Ora, l'argine di un cui profilo noi cerchiamo le dimensioni dev'essere talmente costituito che non abbia luogo nè l'uno nè l'altro dei due movimenti di cui si è parlato qui sopra; adunque la larghezza del suo piano e la inclinazione di ogni sua scarpa coll'orizzonte dovranno soddisfare le relazioni

$$2bfgy+2b^2fgx+a^2fx>a^2,$$

$$3bg(bx+y)(2bx+y)+a^2x(6bx+3y-ax)>a^3$$

od almeno le due equazioni

$$2bfgy+2b^2fgx+a^2fx=a^2,$$

$$3bg(bx+y)(2bx+y)+a^2x(6bx+3y-ax)=a^3.$$

Osservazione II. Crescendo le x, y evidentemente crescono anco le quantità

$$2bfgy+2b^2fgx+a^2fx,$$

$$3bg(bx+y)+a^2x(6bx+3y-ax),$$

mentre le due a^2, a^3 rimangono costanti. Adunque, coll' aumentare la larghezza del piano o col diminuire l' inclinazione di ogni scarpa di un argine, ovvero col variare in questi due modi ambedue queste quantità, si aumenteranno le resistenze che si oppongono ai due movimenti suddetti.

Osservazione III. Supponendo l'altezza dell'acqua sostenuta eguale a quella dell' argine, come si pratica comunemente, ossia che l' acqua arrivi sino al ciglio interno dell' argine, le due equazioni per l' equilibrio sopra considerato si ridurranno alle seguenti

$$2fgy+af(2g+1)=a,$$

$$3gy^2+3a(1+3g)xy+a^2(6g+5)x^2=a^2;$$

e le relazioni necessarie per le corrispondenti stabilità alle

$$2fgy+af(2g+1)>a,$$

$$3gy^2+3a(3g+1)xy+a^2(6g+5)x^2>a^2.$$

Esempio. Sia $f=\frac{3}{5}$, e $g=\frac{9}{5}$; e le due equazioni necessarie pel detto equilibrio diverranno

$$\frac{54}{25}y+\frac{69}{25}ax=a,$$

$$\frac{27}{5}y^2+\frac{96}{5}a\cdot xy+\frac{79}{5}a^2x^2=a^2,$$

le quali danno y eguale a circa un sesto di a; e l' angolo d' inclinazione d' ogni scarpa coll' orizzonte prossimamente di settantasei gradi e mezzo, cioè di circa cinque sesti di un angolo retto.

Osservazione IV. Essendo il coefficiente f d' attrito fra le parti di una stessa qualità di terra eguale alla tangente dell' angolo di equilibrio della terra medesima, siccome si dimostra nella Meccanica, così per ciò che si è esposta al principio di questa parte, sarà, per le terre sabbiose $f=$ tang. 30°, e per le forti $f=$ tang. 36°, cioè per le prime prossimamente

$f=\frac{58}{100}$, e per le seconde $f=\frac{73}{100}$; dimodochè, per qualunque altra qualità di terra ordinaria, asciutta e bene stritolata, dovrà essere l'f compreso fra cinquantotto e settantatre centesimi. Nel seguito però si porrà alcune volte l'f eguale alla frazione $\frac{3}{4}$ o ad altro numero prossimo a questa medesima frazione; ciò si farà per semplicità di calcolo ed anco, perchè le terre componenti gli argini comuni difficilissimamente saranno stritolate ed asciutte, come furono quelle i cui angoli di equilibrio risultarono di trenta e di trentasei gradi. Così per una simile ragione i valori, che si daranno al g peso specifico della terra rispetto a quello dell'acqua non saranno quelle delle terre interamente argillose, sabbiose ecc., ma bensì altri più prossimi ai veri pesi specifici delle terre colle quali formansi gli argini comuni od ordinarj: questi valori non saranno però mai incoerenti coi corrispondenti del coefficiente f medesimo.

Proposizione ottava. Teorema.

Se l'argine sarà abbastanza forte per vincere gli sforzi dell'acqua considerati nelle osservazioni precedenti, anco una porzione di esso superiore a qualunque sua sezione orizzontale avrà una simile proprietà.

Per dimostrare questa proposizione premetterò i due lemmi seguenti.

Primo. Se A, B, a, a' saranno quantità tutte positive, più sia $a'<a$, ed $A+Ba>a$, sarà anco $A+Ba'>a'$.

Avendosi $A+Ba>a$, si avrà anco $\frac{A}{a}+B>1$; ma per essere $a'<a$, sarà $\frac{A}{a'}$ maggiore di $\frac{A}{a}$; quindi avrassi anco $\frac{A}{a'}+B>1$; e moltiplicando per a' ciascun membro di quest' ultima relazione, si otterrà $A+Ba'>a'$. Appunto come si è asserito.

Secondo. Se A, B, C, a, a' rappresenteranno altrettante quantità positive, e sia $a>a'$, più $A+Ba+Ca^2>a^2$, sarà anco $A+Ba'+Ca'^2>a'^2$.

Difatto dividendo per a^2 i due membri della data relazione, si ha $\frac{A}{a^2}+\frac{B}{a}+C>1$.

Ma per essere $a'<a$, si ha anco $\frac{A}{a'^2}>\frac{A}{a^2}$, $\frac{B}{a'}>\frac{B}{a}$; adunque sarà pure $\frac{A}{a'^2}+\frac{B}{a'}+C>1$. Quindi eziandio $A+Ba'+Ca'^2>a'^2$. Come si è detto.

Ciò premesso, passo a dimostrare la proposta proposizione. Essendo stabile l' argine intero, hanno luogo le due relazioni

$$2fgy+af(1+2g)x>a,$$

$$3gy^2+3a(1+3g)xy+a^2(5+6g)x^2>a^2;$$

ed affinchè sia stabile la porzione di esso, che è sopra la sezione orizzontale avente dal suo piano la distanza a', si debbano verificare le due relazioni seguenti

$$2fgy+a'f(1+2g)x>a',$$

$$3gy^2+3a'(1+3g)xy+a'^2(5+6g)x^2>a'^2.$$

Adunque, la dimostrazione della proposta proposizione, si riduce a provare che le due relazioni precedenti danno luogo anco a queste ultime due; ciò

che ora è per sè evidente pei due lemmi premessi; stantechè i coefficienti delle a, a', che entrano in queste quattro relazioni, sono tutti positivi, ed $a'<a$, precisamente, come si è supposto nei due lemmi medesimi.

Proposizione nona. Problema.

Quale inclinazione deve avere coll'orizzonte ogni scarpa di un argine a cresta, perchè non abbiano luogo i due movimenti già considerati superiormente?

Siccome dev' essere $y=0$, così le due relazioni necessarie per la stabilità di cui si parla, si ridurranno alle due

$$f(a^2+2b^2g)x>a^2. \quad (6ba^2-a^3+6b^3g)x^2>a^3$$

le quali danno

$$x>\frac{a}{f(a^2+2b^2g)}, \text{ ed } x>\frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{(6a^2b-a^3+6b^3g)}}.$$

Vale a dire dovrà essere x maggiore della più grande delle due quantità

$$\frac{1}{f\left(1+2g\frac{b^2}{a^2}\right)}, \quad \frac{1}{\sqrt{\left(6\frac{b}{a}-1+6g\frac{b^3}{a^3}\right)}};$$

ossia la tangente dell' angolo d' inclinazione di ogni scarpa coll' orizzonte dovrà essere minore od al più eguale alla più picciola delle due quantità seguenti

$$f\left(1+2g\frac{b^2}{a^2}\right), \quad \sqrt{\left(6\frac{b}{a}-1+6g\frac{b^3}{a^3}\right)}.$$

Corollario. Se l'acqua avesse la medesima altezza dell' argine, cioè se la a fosse eguale alla b, si avrebbe $\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^2}=\frac{b^3}{a^3}=1$; e però, in questo caso

dovrebb' essere la tangente dell' angolo d' inclinazione di ogni scarpa coll' orizzonte minore od al più eguale alla più piccola delle due quantità

$$f(1+2g)\,,\quad \sqrt{(5+6g)}.$$

Esempio. La terra essendo quella usata sopra, si ha $f(1+2g)=\frac{69}{25}$, e $\sqrt{(5+6g)}=\sqrt{\frac{79}{5}}$; e però, affinchè l' argine non sia traslocato sulla sua base nè ribaltato intorno al lato esteriore della base stessa, sarà sufficiente che l' angolo d' inclinazione di ogni scarpa non sia maggiore di quello che ha per tangente $\frac{69}{25}$, cioè di $70^\circ, 5'$.

Osservazione I. Siccome per un argine di terra comune l' angolo d' inclinazione di ogni scarpa coll' orizzonte è sempre di gran lunga minore di $70^\circ, 5'$; così per quello che abbiamo detto nella osservazione seconda della proposizione settima, un argine formato di terra ordinaria, sarà naturalmente stabile rispetto ai due movimenti considerati sopra, che sono gli unici movimenti contemplati da tutti coloro che parlarono sino ad ora della stabilità degli argini di terra. Noi però nel seguito, considerando le cose più al naturale, vedremo, che non solamente non sono stabili gli argini le cui scarpe fanno coll' orizzonte un angolo di $70^\circ, 5'$, ma neppure alcuni di quelli le cui scarpe fanno coll' orizzonte angoli semiretti; contro a ciò che si pensa generalmente.

Osservazione II. Colle cose esposte qui sopra si dimostra facilmente che per gli argini formati con terra ordinaria, il pericolo che abbiano luogo i due movimenti considerati superiormente, è maggiore per l' argine intero che per una sua porzione superiore ad una sezione orizzontale del medesimo; che

tra gli argini che hanno profili equivalenti e scarpe egualmente inclinate all'orizzonte il méno alto ha più stabilità; come pure che fra gli argini di eguali altezze e di profili equivalenti quello che ha maggiore base degli altri è il più stabile fra essi.

Nelle quattro proposizioni qui sopra esposte si raccoglie, come ho già detto, quanto di più importante è stato pubblicato sulla stabilità degli argini formati con terra; io vi unisco le ventune proposizioni seguenti, lusingandomi di fare cosa altrettanto grata al lettore, quanto essa è utile; giacchè in queste si trattano le cose presso a poco come succedono effettivamente in natura.

Proposizione decima. Problema.

Determinare quella resistenza non che quella spinta cagionata dal peso della porzione $ABCE$ (fig. 6) di un argine, le quali hanno parte su quel moto progressivo di essa porzione, che può succedere lungo il piano EA condotto per A e comunque inclinato alla orizzontale AD base di esso argine?

Si rappresentino, con a la AD base dell'argine, con b la lunghezza CD od AB delle scarpe, con m l'angolo $CDA = BAD$; con ω l'angolo EAD; con g il peso specifico della terra, e con f il coefficiente d'attrito della terra medesima, come già si è fatto sopra.

Così il punto G indichi il centro di gravità dell'area del profilo $ABCE$; le rette GP, EF due verticali; la GQ una parallela alla sezione AE, e la GN una perpendicolare alla medesima sezione.

Essendo la lunghezza del tronco d'argine eguale alla unità lineare, sarà il peso della porzione $ABCE$ di esso eguale al prodotto dell'area del quadrilatero $ABCE$ nel g peso specifico; e però espresso da

$$(ABCD - AED)g.$$

Ma per essere

$$ED = \frac{a \text{ sen. } \omega}{\text{sen.}(m + \omega)}, \text{ e però } EF = \frac{a \text{ sen. } \omega \text{ sen. } m}{\text{sen.}(m + \omega)},$$

si ha l'area di AED, ossia $\frac{1}{2}AD \cdot EF$, eguale ad

$$\frac{1}{2}a^2 \frac{\text{sen. } m \text{ sen. } \omega}{\text{sen.}(m + \omega)};$$

così si trova l'area di $ABCD = (a - b\cos. m)\, b \text{ sen.} m$; adunque sarà

$$(ABCD - AED)g = \left((a - b\cos. m)\, b \text{ sen.} m - \frac{1}{2}a^2 \frac{\text{sen.} m \text{ sen.} \omega}{\text{sen.}(m + \omega)}\right)g;$$

ossia eguale ad

$$\left(ab - b^2 \cos. m - \frac{1}{2}a^2 \frac{\text{sen. } \omega}{\text{sen.}(m + \omega)}\right) g \text{ sen. } m.$$

Ora si nominino rispettivamente N e Q quelle componenti del peso qui determinato, che hanno le direzioni GN, GQ. Evidentemente avrassi la N eguale al prodotto del peso stesso nel coseno dell'angolo PGN ossia di ω; e la Q eguale al prodotto dello stesso peso nel seno dello stesso angolo; cioè si avrà

$$N = \left(ab - b^2 \cos. m - \frac{1}{2}a^2 \frac{\text{sen. } \omega}{\text{sen.}(m + \omega)}\right) g \text{ sen.} m \cos. \omega,$$

$$\text{e } Q = \left(ab - b^2 \cos. m - \frac{1}{2}a^2 \frac{\text{sen. } \omega}{\text{sen.}(m + \omega)}\right) g \text{ sen.} m \text{ sen. } \omega).$$

Quindi la resistenza e la spinta dimandate, le quali sono fN, e Q, come è evidente, saranno espresse, la prima da

$$\left(ab - b^2 \cos. m - \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}\,(m+\omega)}\right) fg\,\text{sen.}\,m \cos.\,\omega,$$

e la seconda da

$$\left(ab - b^2 \cos. m - \tfrac{1}{2} a^2 \frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}\,(m+\omega)}\right) g\,\text{sen.}\,m\,\text{sen.}\,\omega.$$

Proposizione undecima. Problema.

Determinare sì la resistenza che la spinta, che concorrono colle due considerate nella proposizione antecedente, a produrre il moto progressivo della porzione $ABCE$ sul piano EA; e che provengono dalla azione dell'acqua appoggiata alla scarpa CE della stessa porzione $ABCE$?

Si supponga, come si fa comunemente per assicurare maggiormente la stabilità all'argine, il pelo dell'acqua a livello colla BC piano dell'argine; e si faccia EH eguale ad un terzo della EC, si conducano le rette SHM, VH perpendicolari rispettivamente alla CD, AE e la HT parallela alla AE; più si nomini S la pressione dell'acqua sulla scarpa CE; e T e V le sue due componenti dirette secondo le TH, VH.

Le proposizioni seconda e quarta della parte precedente somministrano

$S = \frac{1}{2} CE \,.\, CE\,\text{sen.}\,m = \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,m \times \overline{CE}^2$,

$V = S\,\text{sen.}\,SHT = \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,m\,\text{sen.}\,SHT \times \overline{CE}^2$,

e $T = S\cos.\,SHT = \frac{1}{2}\,\text{sen.}\,m \cos.\,SHT \times \overline{CE}^2$.

Ma se $CE = CD - ED$,

ed $SHT = ALM = LMD - \omega = 90^\circ - (m+\omega)$; e

però $CE = b - \dfrac{a\,\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}\,(m+\omega)}$, $\cos.SHT = \text{sen.}(m+\omega)$,

$\text{sen.}\,SHT = \cos.\,(m+\omega)$; adunque sarà

$$V = \frac{1}{2}\left(b - \frac{a \operatorname{sen.} \omega}{\operatorname{sen.}(m+\omega)}\right)^2 \operatorname{sen.} m \cos.(m+\omega),$$

$$\text{e } T = \frac{1}{2}\left(b - a\frac{\operatorname{sen.} \omega}{\operatorname{sen.}(m+\omega)}\right)^2 \operatorname{sen.} m \operatorname{sen.}(m+\omega).$$

Quindi la resistenza richiesta in quest' ultima proposizione, la quale è evidentemente fV, sarà espressa da

$$\frac{1}{2}\left(b - \frac{a \operatorname{sen.} \omega}{\operatorname{sen.}(m+\omega)}\right)^2 f \operatorname{sen.} m \cos.(m+\omega);$$

e la spinta, che è la stessa componente T, lo sarà da

$$\frac{1}{2}\left(b - \frac{a \operatorname{sen.} \omega}{\operatorname{sen.}(m+\omega)}\right)^2 \operatorname{sen.} m \operatorname{sen.}(m+\omega).$$

Proposizione dodicesima. PROBLEMA.

Trovare le proprietà alle quali debbono soddisfare le dimensioni di un argine, perchè la sua porzione $ABCE$ non isdruccioli in giù del piano EA considerato sopra; cioè, affinchè essa porzione o sia stabile od almeno in equilibrio sul piano stesso EA, avendo per ora riguardo al solo moto di traslazione diretto da E verso A?

Essendo le spinte, che hanno luogo sulla porzione $ABCE$ del tronco d' argine, evidentemente Q e T, e le resistenze Nf, Vf; affinchè la porzione stessa $ABCE$ sia stabile sul piano EA, dovrà essere

$$Nf + Vf > Q + T;$$

ed affinchè sia in equilibrio

$$Nf + Vf = Q + T.$$

Vale a dire lo stato di $ABCE$ sul piano EA sarà di stabilità o di equilibrio, secondo che sarà $Nf + Vf - Q - T$ quantità positiva o nulla. E per tanto, le dimensioni dell' argine dovranno

rendere positiva pel primo stato, e nulla pel secondo, la quantità seguente

$$g\left(ab-b^2\cos.m-\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}(m+\omega)}\right)(f\cos.\omega-\text{sen.}\omega)\,\text{sen.}\,m$$

$$+\tfrac{1}{2}\left(b-\frac{a\,\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}(m+\omega)}\right)^2\left(f\cos.(m+\omega)-\text{sen.}(m+\omega)\right)\text{sen.}\,m.$$

Osservazione I. Nel seguito, quest' ultima espressione, la quale esprime evidentemente l' eccesso dell' effetto di quelle forze che sono dirette a trattenere $ABCE$ sul piano EA sull' effetto delle contrarie, si nominerà costantemente φ; dimodochè la porzione $ABCE$ d' argine sarà stabile o in equilibrio, ovvero in moto sul piano EA, secondo che sarà φ positivo, nullo, ovvero negativo.

Osservazione II. Alla espressione denominata φ si può dare una forma molto più semplice di quella che essa ha attualmente. Di fatto, si ponga $AEC=\theta$; e si avrà $m+\omega=\theta$, $\omega=\theta-m$; e però

$$\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}(m+\omega)}=\frac{\text{sen.}(\theta-m)}{\text{sen.}\,\theta}=\cos.m-\text{sen.}\,m\cot.\theta,$$

$$ab-b^2\cos.m-\frac{a^2}{2}\,\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}(m+\omega)}=p+q\cot.\theta, \text{ posto}$$

$$ab-b^2\cos.m-\frac{a^2}{2}\cos.m=p\,,\ \text{ ed }\ \frac{a^2}{2}\text{sen.}\,m=q.$$

Così si ha

$$b-\frac{a\,\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}(m+\omega)}=r+s\cot.\theta,\ \text{ posto}$$

$$b-a\cos.m=r,\ \text{ ed }\ a\,\text{sen.}\,m=s.$$

Similmente si ottiene

$g(f\cos.\omega-\text{sen.}\,\omega)=\mu\cos.\theta+\beta\,\text{sen.}\,\theta$, ove

$\mu=fg\cos.m+g\,\text{sen.}\,m$, e $\beta=fg\,\text{sen.}\,m-g\cos.m$.

Quindi sarà φ eguale a

$$(p+q\cot.\theta)\,(\mu\cos.\theta+\beta\,\text{sen.}\,\theta)\,\text{sen.}\,m$$
$$+\tfrac{1}{2}(r^2+2rs\cot.\theta+s^2\cot.^2\theta)\,(f\cos.\theta-\text{sen.}\,\theta)\,\text{sen.}\,m.$$

Ora si facciano le moltiplicazioni tutt' ora indicate, e si ponga per semplicità

$$\mu p+\beta q+\tfrac{1}{2}fr^2-rs=A\,,\quad \beta p-\tfrac{1}{2}r^2=B\,,$$
$$\mu q+frs-\tfrac{1}{2}s^2=C\,,\quad \text{ed}\quad \tfrac{1}{2}fs^2=D;$$

e si troverà finalmente con ciò

$$\phi=\text{sen}\,m\times(A\cos\theta+B\,\text{sen}\,\theta+C\cos\theta\cot\theta+D\cos\theta\cot^2\theta),$$

ovvero

$$\phi=\text{sen}\,m\times(B+A\cot\theta+C\cot^2\theta+D\cot^3\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Osservazione III. Se nelle espressioni degli A, B, C, D, si pongano in luogo delle p, q, r, s, μ e β i loro valori formati colle sole a, b, ed m, trovasi

$$A=\tfrac{1}{2}b^2f+abg\,\text{sen}\,m-ab\,\text{sen}\,m+abfg\cos m-abf\cos m$$
$$+a^2\,\text{sen}\,m\cos m-a^2g\,\text{sen}\,m\cos m-b^2g\,\text{sen}\,m\cos m$$
$$+\frac{a^2}{2}fg\,\text{sen}^2m-b^2fg\cos^2m-\frac{a^2}{2}fg\cos^2m+\frac{a^2}{2}f\cos^2m;$$

$$B=-\tfrac{1}{2}b^2+abfg\,\text{sen}\,m-abg\cos m+ab\cos m$$
$$-b^2fg\,\text{sen}\,m\cos m-\tfrac{1}{2}a^2fg\,\text{sen}\,m\cos m+b^2g\cos^2m$$
$$+\frac{a^2}{2}g\cos^2m-\frac{a^2}{2}\cos^2m;$$

$$C=abf\,\text{sen}\,m+\frac{a^2}{2}fg\,\text{sen}\,m\cos m+\frac{a^2}{2}g\,\text{sen}^2m$$
$$-a^2f\,\text{sen}\,m\cos m-\frac{a^2}{2}\text{sen}^2m;\quad \text{e}$$

$$D=\tfrac{1}{2}a^2f\,\text{sen}^2m.$$

Corollario I. Pel piano AD si ha $\omega=0$; e perciò

$$\phi=g\cdot ABCD\frac{\text{sen.}\,\alpha}{\cos.\,\alpha}+\tfrac{1}{2}b^2\,\text{sen.}\,m\frac{\text{sen.}\,(\alpha-m)}{\cos.\,\alpha};$$

dove α esprime quell' angolo che ha per tangente il coefficiente f. Così, per il piano AC si avrà

$$\phi=g\cdot ABC\frac{\text{sen.}\,(\alpha-CAD)}{\cos.\,\alpha};$$

quindi la differenza fra il φ antecedente e questo sarà

$$\Big\{gABC\Big(\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,(\alpha - CAD)\Big) + gACD\,\text{sen}\,\alpha + \tfrac{1}{2}b^2\,\text{sen}\,m\,\text{sen}\,(\alpha - m)\Big\} : \cos\alpha\,,$$

quantità generalmente positiva, e sempre tale nel caso di m minore di α; per cui in quest'ultimo caso, per rispetto al moto di traslazione, la stabilità dell'argine intero sarà maggiore di quella della sua porzione ACD superiore al piano AC.

Proposizione tredicesima. Problema.

Fra le infinite sezioni, che passano per A analogamente alla AE, determinare quella per la quale l'eccesso φ suddetto è un minimo; cioè determinare fra le dette sezioni quella della minima resistenza o della più probabile rottura?

Dalla penultima espressione generale della φ si cava per $\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)$ il valore

$$\text{sen}\,m \times \left(-A\,\text{sen}\,\theta + B\cos\theta - C\cos\theta - C\frac{\cot\theta}{\text{sen}\,\theta} - D\cos\theta\cot\theta - 2D\frac{\cot^2\theta}{\text{sen}\,\theta}\right),$$

il quale facilmente si riduce al seguente

$$\text{sen}\,m \times \left(-A + (B-2C)\cot\theta - D\cot^2\theta - (2D\cot^2\theta + C\cot\theta)\frac{1}{\text{sen}^2\theta}\right)\text{sen}\,\theta;$$

e però, posto $\cot\theta = y$, si avrà

$$\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right) = \text{sen}\,m \times \left(-A + (B-2C)y - 3Dy^2 - Cy^3 - 2Dy^4\right)\text{sen}\,\theta\,;$$

e da quest'ultima espressione della medesima derivata $\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)$, rammentandosi che $\left(\frac{dy}{d\theta}\right) = -\frac{1}{\text{sen}^2\theta}$, si deduce

$$\left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)=\text{sen}\,m\left(-A+(B-2C)y-3Dy^2-Cy^3-2Dy^4\right)\cos\theta$$
$$+\text{sen}\,m\left(2C-B+6Dy+3Cy^2+8Dy^3\right)\frac{1}{\text{sen}\,\theta}.$$

Quindi il valore dell' angolo θ, per la sezione della minima resistenza o della più probabile rottura, dovrà soddisfare l' equazione

$$\text{sen}\,m\times\left(A+(2C-B)y+3Dy^2+Cy^3+2Dy^4\right)\text{sen}\,\theta=0,$$

e rendere positiva la quantità

$$-\text{sen}\,m\times\left(A+(2C-B)y+3Dy^2+Cy^3+2Dy^4\right)\cos\theta$$
$$+\text{sen}\,m\times\left(2C-B+6Dy+3Cy^2+8Dy^3\right)\frac{1}{\text{sen}\,\theta}.$$

Ma siccome per questa sezione non può essere nè $\text{sen}\,\theta=0$, nè $\frac{1}{\text{sen}\,\theta}$ negativo; giacchè θ non può essere minore di m, nè maggiore di m più CAD; così l'angolo θ, corrispondente ad essa sezione, dovrà soddisfare l' equazione

$$2Dy^4+Cy^3+3Dy^2+(2C-B)y+A=0\,;$$

e rendere positiva la quantità

$$2C-B+6Dy+3Cy^2+8Dy^3\,;$$

vale a dire, la sezione richiesta, qualora cada fra AC ed AD, farà colla scarpa CD un angolo CEA, la cui cotangente sarà una radice dell' equazione

$$2Dy^4+Cy^3+3Dy^2+(2C-B)y+A=0$$

non maggiore di $\cot m$ nè minore di $\cot(m+CAD)$ ossia di $\cot m-\frac{b}{a}\text{cosec}\,m$; e renderà positiva l' espressione

$$2C-B+6Dy+3Cy^2+8Dy^3,$$

qualora venga in essa sostituita in luogo della y.

Se poi l'equazione qui esposta non avesse nessuna radice compresa fra i limiti $\cot m$, $\cot m - \frac{b}{a} \operatorname{cosec} m$, o eguale ad uno di essi, la sezione dimandata sarebbe in generale la AC; poichè per tal caso, φ sarebbe per questa sezione minore del φ relativo a qualunque altra compresa fra essa AC e la base AD: che se la differenza trovata nel corollario primo della precedente proposizione risultasse negativa, la sezione richiesta sarebbe la stessa base AD: quest' ultimo caso però nell'atto pratico difficilmente avrà luogo.

Nel primo di questi ultimi due casi sarà l'angolo θ eguale all' m più il CAD; e nel secondo eguale al solo m; ossia $y = \cot m - \frac{b}{a} \operatorname{cosec} m$ pel primo, ed $y = \cot m$ pel secondo.

Corollario. Se nell' una o nell' altra espressione di φ esposte nella antecedente proposizione, in luogo dell'angolo θ, si porrà il valore corrispondente alla sezione qui sopra determinata, si avrà il minimo valore dell'eccesso φ stesso, la cui conoscenza è sommamente importante; giacchè esso è la vera misura della forza dell'argine rispetto al moto di traslazione di cui si parla.

Osservazione IV. Se quest'ultimo valore di φ risulterà positivo, nessuna porzione dell'argine fra quelle, che sono sopra sezioni analoghe alla AE potrà sdrucciolare sulla rispettiva base: se esso risulterà nullo, la porzione situata sopra alla sezione di anzi determinata sarà appena in equilibrio, e quella sovra a qualunque analoga sezione sarà stabile. In fine, se il minimo valore di φ risulterà negativo,

quella porzione dell'argine, la quale sarà sulla suddetta sezione, scorrerà in basso pel piano di essa sezione, e la rottura dell'argine sarà certa, se le terre non vi opporranno una sensibile tenacità; anzi un analogo movimento potrà aver luogo anco per altre porzioni simili, come è facile a concepirsi.

Osservazione V. Nel primo di questi tre casi, la sezione determinata dall' angolo θ, la quale fa coll' orizzonte un angolo eguale a $\theta - m$, sarà quella della minima resistenza; cioè fra le porzioni d' argine superiori alle sezioni, che passano per A, quella superiore alla suddetta sarà quella della minore stabilità: nel secondo sarà essa la sezione di nessuna resistenza ossia quella la cui porzione d'argine sovra ad essa medesima sarà appena in equilibrio, e nel terzo caso la medesima sezione di cui si parla si chiamerà *sezione della rottura più probabile.*

Proposizione quattordicesima. PROBLEMA.

Per un argine a cresta, e le cui scarpe sono inclinate all'orizzonte di un angolo semiretto; trovare la sezione a cui corrisponde il minimo valore di φ, cioè quella della minima resistenza o della rottura più probabile?

Il profilo di quest'argine sia espresso dal triangolo isoscele rettangolo ABC (fig 7): si dimanda quella sezione AE per la quale l'eccesso φ di cui si è parlato sopra, è un minimo?

Le dimensioni particolari di quest' argine danno $a = b\sqrt{2}$, ed anco $a \operatorname{sen} m = a \cos m = b$. Sostituendo nelle espressioni degli A, B, C, D esposte nella

osservazione terza della proposizione penultima, in luogo di a e di $a \operatorname{sen} m = a \cos m$ rispettivamente $b\sqrt{2}$, b, si ottiene

$$A = \tfrac{1}{2} b^2 (fg - g), \qquad B = 0,$$
$$C = \tfrac{1}{2} b^2 (fg + g - 1), \ D = \tfrac{1}{2} b^2 f,$$

e $2C - B = \tfrac{1}{2} b^2 (fg + g - 1)$; e però l'equazione dalla quale, in questo caso, converrà cavare la cotangente dell'angolo θ, da cui dipende l'ω dimandato, sarà la seguente

$$2fy^4 + (fg+g-1)y^3 + 3fy^2 + 2(fg+g-1)y + fg - g = 0,$$

qualunque sia g peso specifico della terra ed f suo coefficente d' attrito.

Per le terre ordinarie essendo $g > 1$, ed $f < 1$, i primi quattro termini dell'equazione qui trovata saranno tutti positivi, e l'ultimo invece sarà negativo; e però l'equazione medesima avrà una sola radice reale positiva; anzi, siccome gli stessi ordinari valori delle g, f rendono positivo il risultamento

$$5f + 4fg + 2g - 3,$$

che si ha, facendo $y = 1$ nel primo membro della stessa equazione; così la radice positiva di essa sarà minore della unità, e conseguentemente l' angolo, che avrà per cotangente siffatta radice, sarà compreso fra il semiretto ed il retto.

Sostituendo i valori delli B, C, D sopra trovati; cioè

$$0, \ \tfrac{1}{2} b^2 (fg + g - 1), \ \tfrac{1}{2} b^2 f$$

nella espressione

$$\operatorname{sen} m \times \left(2C - B + 6Dy + 3Cy^2 + 8Dy^3\right) \frac{1}{\operatorname{sen} \theta},$$

che è il valore di $\left(\frac{d^2 \varphi}{d \theta^2}\right)$ corrispondente a quello d' y di cui si parla, si ha

$$b^2 \operatorname{sen} m \times \left(fg+g-1+3fgy+\tfrac{3}{2}(fg+g-1)y^2+4fy^3\right)\frac{1}{\operatorname{sen}\theta};$$

quantità positiva, per essere θ angolo positivo e minore di un retto, e g maggiore della unità.

Concludiamo pertanto, che per l'argine in quistione, avvi effettivamente fra le AD ed AB la sezione per la quale l'eccesso ϕ è un minimo.

Onde dare un esempio, si supponga

$$f = \tfrac{1}{10}(1+\sqrt{41}) = 0{,}7403$$

$$\text{e} \quad g = \tfrac{1}{8}(5+\sqrt{41}) = 1{,}4250:$$

questi valori di f e g, molto prossimi a quelli che si usano comunemente, danno

$$fg+g-1 = 2f, \quad \text{ed} \quad fg-g = -\tfrac{1}{2}f;$$

e però riducono l'equazione a sciogliersi, per avere l'y alla seguente semplicissima

$$y^4+y^3+\tfrac{3}{2}y^2+2y-\tfrac{1}{4}=0.$$

Questa equazione si potrebbe sciogliere colla regola, che si usa per trovare le radici delle equazioni letterali del quarto grado; io qui però farò uso di quella dei limiti. Se in essa si pongano successivamente le frazioni $\frac{4}{34}$, $\frac{4}{35}$ in luogo della y, si ottengono i risultamenti seguenti

$$\frac{21538}{83521}-\frac{1}{4}>0,$$

$$\frac{360196}{1500625}-\frac{1}{4}<0;$$

e però prossimamente si può prendere la $y=\frac{8}{69}$. Quindi avrassi la cotangente dell'angolo θ eguale ad $\frac{8}{69}$ del raggio, e conseguentemente $\theta = 83°, 23', 12''$ circa.

Ma $\omega = \theta - m$, ed $m = 45°$; adunque prossimamente sarà $\omega = 38°, 23', 12''$.

Vale a dire, in questo esempio, la sezione della minor resistenza fra quelle che passano pel punto A, sarà inclinata all' orizzonte di un angolo di gradi trentotto, ventitre minuti primi, e dodici secondi, prossimamente.

Proposizione quirdicesima. Teorema.

L' eccesso φ relativo alla sezione determinata nella proposizione precedente è negativo; dimodochè la sezione medesima sarà quella della più probabile rottura.

Sostituendo nella espressione generale di φ in luogo dei coefficienti A, B, C, D i loro valori $\frac{1}{2}b^2(fg-g)$, zero, $\frac{1}{2}b^2(fg+g-1)$, $\frac{1}{2}b^2f$ trovati nella precedente proposizione, essa riducesi alla seguente

$$\tfrac{1}{2}b^2 \operatorname{sen} m \times \Big(fg-g+(fg+g-1)y+fy^2\Big)\cos\theta.$$

E se in quest' ultima espressione si porrà il valore d' y radice positiva della equazione

$$2fy^4+(fg+g-1)y^3+3fy^2+2(fg+g-1)y+fg-g=0$$

esposta nella stessa citata proposizione, si avrà il minimo valore di φ, il quale sarà negativo.

Di fatto, per essere l' angolo θ minore di un retto e positivo, il segno dell' eccesso φ dipende dal segno del fattore seguente del suo valore

$$fg-g+(fg+g-1)y+fy^2.$$

Ma siccome questo valore d' y ha la proprietà di annullare il polinomio

$$2fy^4+(fg+g-1)y^3+3fy^2+2(fg+g-1)y+fg-g,$$

il quale equivale alla somma dei due

$$fg - g + (fg + g - 1)y + fy^2,$$

$$(fg+g-1)y + 2fy^2 + 2(fg+g-1)y^3 + 2fy^4,$$

di cui il secondo è positivo; adunque il primo, cioè

$$fg - g + (fg + g - 1)y + fy^2,$$

il quale è visibilmente il suddetto fattore del valore di ϕ, sarà negativo; e pertanto risulterà negativo anco lo stesso eccesso ϕ. Quindi la sezione alla quale corrisponde questo medesimo eccesso sarà quella della più probabile rottura.

Per l'esempio esposto alla fine dell' antecedente proposizione si ha

$$\phi = \frac{3b^2}{16\sqrt{2}}(2y^2 + 4y - 1)\cos\theta,$$

ossia $\phi = \frac{3b^2}{16\sqrt{2}}(2y^2 + 4y - 1)\frac{y}{\sqrt{(1+y^2)}}$

quantità la quale facendo $y = \frac{9}{53}$, dà per ϕ il valore seguente

$$-\frac{1425}{19044}b^2 f \times \frac{8}{\sqrt{9650}},$$

il quale visibilmente è appunto negativo.

Osservazione I. Supposto $\theta = m = 45°$, ossia $\omega = 0$, si ha

$$\phi = \tfrac{1}{2}(A + B + C + D);$$

cioè $\phi = \frac{1}{4}b^2(2fg + g - 1)$:

quantità positiva qualunque sia b. Adunque le porzioni d'argine, che si appoggiano sovra sezioni orizzontali, sono stabili; mentre quelle, che stanno sopra la sezione determinata nella antecedente proposizione, ovvero sopra sezioni sue parallele, non sono neppure in equilibrio: questo prova ciò che ho asserito nelle nozioni generali esposte fra le proposizioni quinta e sesta, cioè che le dimensioni di

un argine atte a rendere stabile l' argine intero e però qualunque sua porzione superiore a sezioni orizzontali non sono sufficenti per la stabilità dell' argine stesso: come si è sino ad ora creduto.

Osservazione II. Uguagliando a zero il fattore $fg-g+(fg+g-1)y+fy^2$ della espressione di φ, si ha l' equazione

$$fy^2+(fg+g-1)y+fg-g=0,$$

che ha evidentemente, nel caso di $g>1$ ed $f<1$, una radice positiva minore della unità, la quale è eguale ad

$$\frac{1-g-fg}{2f}+\frac{1}{2f}\sqrt{(1-g-fg)^2+4fg(1-f)}\,.$$

Questo valore è la cotangente dell' angolo θ, dal quale levati quarantacinque gradi somministra l'angolo d'inclinazione di quella sezione di cui la porzione d' argine ad essa superiore è appena in equilibrio: anzi siccome questo valore d'y è indipendente dalla b, così tutte quelle porzioni dell'argine di cui si parla, le quali trovansi sopra sezioni parallele a quella determinata in tal guisa godono di una simile proprietà.

Nell' esempio anzi considerato, risultando, come abbiam veduto

$\varphi=\frac{3b^2f}{16\sqrt{2}}(2y^2+4y-1)\cos\theta$, sarà $2y^2+4y-1=0$, ovvero y cioè $\cot\theta=-1+\sqrt{\frac{3}{2}}$; e però prossimamente $\theta=77^\circ,\ 5'$. Quindi l' ω eguale a $32^\circ,\ 3'$. Vale a dire, nell' argine in questione le sezioni, a seconda delle quali la resistenza e la spinta totale si uguagliano, hanno all' orizzonte una inclinazione prossi-

mamente di trentadue gradi e tre minuti primi; cioè di circa un terzo di un angolo retto.

Proposizione sedicesima. Problema.

Fra quelle sezioni di un argine interzato, che passano per A (fig. 6), trovare quella a cui corrisponde il minimo valore dell' eccesso ϕ?

Essendo l'argine interzato, sarà $a = 3b \operatorname{sen} m = \frac{3b}{\sqrt{2}}$, ed anco $a \operatorname{sen} m = a \cos m = \frac{3b}{2}$. Sostituendo questi valori nelle espressioni generali dei coefficenti A, B, C e D, essi danno

$$A = \tfrac{1}{8} b^2 (8fg + f + 6 - 10g),$$
$$B = \tfrac{1}{8} b^2 (g - fg - 1), \quad D = \tfrac{9}{8} b^2 f,$$
$$C = \tfrac{1}{8} b^2 (9fg + 9g - 6f - 9), \text{ e}$$
$$2C - B = \tfrac{1}{8} b^2 (19fg + 17g - 12f - 17);$$

da cui si vede che $D, C, 2C - B$, ed A sono quantità tutte positive per le terre ordinarie; e pertanto, nel caso presente, l'equazione

$$2Dy^4 + Cy^3 + 3Dy^2 + (2C - B)y + A = 0$$

non ha veruna radice positiva. Ma siccome in questo medesimo caso, affinchè vi fosse la sezione corrispondente al minimo valore di ϕ, e compreso fra le AD, AC richiederebbesi evidentemente l'angolo θ maggiore di un semiretto e minore di un semiretto più l'angolo CAD, il quale è minore del semiretto CDA; adunque per l' argine interzato, non avvi sezione fra le AC, AD a cui corrisponda minimo valore dell' eccesso ϕ. Quindi per quest' argine, siccome

ad $\omega = 0$ corrisponde $\varphi = \frac{b^2}{4}(4fg + g - 1)$,

ed a $\omega = CAD$ corrisponde $\varphi = \frac{b^2}{4\sqrt{5}}(2fg - g)$;

e questo secondo valore di φ è evidentemente, per le terre ordinarie, minore del primo; così fra quelle sezioni dell'argine interzato, che passano pel punto A, ed attraversano l'argine intero, quella a cui corrisponde il minimo valore dell'eccesso φ, cioè la dimandata, sarà la stessa AC; e sarà essa la sezione della effettiva minima resistenza.

Esempio. Suppongasi, col signor Venturoli,

$$g = 1{,}428, \text{ ed } f = 0.75;$$

e sostituiscansi questi numeri in luogo delle g ed f contenute nelle espressioni degli A, B, C e D, qui sopra determinati; e si avrà

$$A = (0{,}12075)\,b^2, \quad B = -(0.643)\,b^2,$$
$$C = (2{,}730375)\,b^2, \quad D = (0{,}84375)\,b^2,$$

e $2C - B = (6{,}103750)\,b^2$; e per conseguenza l'equazione in y sarà

$$1687500\,y^4 + 2730375\,y^3 + 2531250\,y^2$$
$$+ 6041125\,y + 129750 = 0,$$

la quale non ha evidentemente nessuna radice positiva; e conseguentemente l'angolo θ determinato con essa non può essere minore di un retto e molto meno di un semiretto più CAD, cioè di 71°, $34'$ prossimamente.

Osservazione I. Facendo $\theta = m = 45^\circ$ per l'argine cui parlasi, si ottiene

$$\varphi = \tfrac{1}{2}(A + B + C + D) = (1{,}56225)\,b^2;$$

e facendo $\cot\theta = \frac{1}{3}$, ciò che corrisponde ad una sezione inclinata all'orizzonte di circa $18^\circ, 26'$; e però

intermedia fra le due AD, AC, si ha

$$\phi=(2A+C+D+\tfrac{1}{4}B)\frac{b^2}{\sqrt{40}};$$ e conseguentemente

$$\phi=(0,172683144)\,b^2,$$

quantità minore di quella trovata dianzi e corrispondente al $\theta=45°$. Quindi i valori di ϕ provenienti dai valori di θ compresi fra $45°$ e $45°+CAD=71°,34'$ costituiscono una serie decrescente; dimodochè fra le infinite sezioni, che passano per A e segano l'intero argine, quella per la quale ϕ è un minimo, cioè la sezione della minima resistenza sarà la stessa AC, la quale corrisponde ad $y=\frac{1}{2}$.

Questo valore d'y dà $\phi=\frac{b^2 g}{8\sqrt{5}}=\frac{357}{4472}\,b^2$ prossimamente, valore, il quale sarà il minimo di ϕ per l'argine interzato.

Tutti questi ultimi risultamenti si possono desumere anco da ciò, che si è detto in questa medesima proposizione prima della presente osservazione.

Osservazione II. Io credo questo il luogo opportuno di fare una dichiarazione relativa alla stabilità degli argini formati di terra ordinaria, dichiarazione sommamente importante, onde concepire alcune cose, che si ammettono tacitamente in questa teorica e dalla cognizione delle quali dipende in certa guisa il conto che di essa si dovrà fare nella pratica.

Se un argine si dovesse formare tutto di una medesima qualità di terra, per esempio, di pura argilla o di pura sabbia, asciutta e stritolata perfettamente; poco utili risulterebbero le ricerche relative alle dimensioni di un argine, il quale avesse le scarpe inclinate all' orizzonte più delle inclinazioni volute

dall' equilibrio delle terre stesse; giacchè impossibile assolutamente sarebbe la sua costruzione: ma siccome le terre colle quali si fanno gli argini generalmente non sono affatto prive di umidità e non sono interamente stritolate, più le loro molecole non sono del tutto prive di tenacità; così si può azzardare il progetto di un argine, le scarpe del quale facciano coll' orizzonte angoli maggiori di quelli voluti dall' equilibrio delle terre medesime colle quali si dovrà esso formare, appoggiando il buon esito di esso alla imperfetta siccità e stritolatura delle terre ed imparte anco alla loro tenacità, la quale può essere bensì tenuissima, ripeto, ma difficilissimamente del tutto trascurabile in confronto delle altre cause da cui dipende la stabilità.

Le medesime tre qualità della terra qui annoverate, cioè l'imperfetta aridità e stritolatura e la tenacità non del tutto trascurabile, sono le cause che si ammettono tacitamente, allorchè si suppone che le molecole integranti una porzione d'argine analoga alla *ABCE* formino un solo e medesimo corpo di terra, il quale non possa moversi, che sdrucciolando sulla sua base o col rotare intorno al lato esteriore di questa base medesima; però sebbene si ammettono le dette qualità della terra fra le sue molecole costituenti le porzioni d'argine analoga alla *ABCE*, nulladimeno si ritiene che il solo attrito sia la difficoltà che influisse sul moto che essa porzione può avere sulla sua base; ciò che è favorevole alla stabilità dell' argine medesimo, come già si è avvertito in altra occasione.

Proposizione diciassettesima. Problema.

Fra gli argini a cresta di altezze eguali e stabili per rispetto ai suddetti movimenti; trovare quello della minima base ossia delle scarpe più inclinate all' orizzonte?

Nelle espressioni generali degli A, B, C e D si ponga in luogo di a il suo valore competente agli argini a cresta, cioè $2\,b\cos m$; e si avrà

$$A = b^2\left(\tfrac{1}{2}f + g\,\mathrm{sen}\,m\cos m - 2\,\mathrm{seu}\,m\cos m + fg\cos^2 m - 2f\cos^2 m + 4\,\mathrm{sen}\,m\cos^3 m - 4g\,\mathrm{sen}\,m\cos^3 m + 2fg\,\mathrm{sen}^2 m\cos^2 m - 2fg\cos^4 m + 2f\cos^4 m\right),$$

$$B = b^2\left(-\tfrac{1}{2} + fg\,\mathrm{sen}\,m\cos m - g\cos^2 m + 2\cos^2 m - 2fg\,\mathrm{sen}\,m\cos^3 m + 2g\cos^4 m - 2\cos^4 m\right),$$

$$C = 2b^2\left(f\cos m + fg\cos^3 m - 2f\cos^3 m + g\,\mathrm{sen}\,m\cos^2 m - \mathrm{sen}\,m\cos^3 m\right)\mathrm{sen}\,m,$$

e $D = 2b^2 f\,\mathrm{sen}^2 m\cos^2 m$;

indi si ponga $\cot m = x$, e però $\cos m = \dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}$,

$\mathrm{sen}\,m = \dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)}}$; e si otterrà

$$A = b^2\left(\tfrac{1}{2}f + (g-2)x + f(3g-1)x^2 + (2-3g)x^3 + f(\tfrac{1}{2}-g)x^4\right) : (1+x^2)^2,$$

$$B = b^2\left(-\tfrac{1}{2} + fgx + (1-g)x^2 - fgx^3 + (g-\tfrac{1}{2})x^4\right) : (1+x^2)^2,$$

$$C = 2b^2\left(fx + (f-1)x^2 + f(g-1)x^3\right) : (1+x^2)^2,$$

e $D = 2b^2 f x^2 : (1+x^2)^2$.

Ora, nella seconda osservazione della proposizione dodicesima si è trovato

$$\phi = \operatorname{sen} m \times (B + A \cot \theta + C \cot^2 \theta + D \cot^3 \theta) \operatorname{sen} \theta;$$

per cui, affinchè siavi stabilità, dovrà essere

$$\operatorname{sen} m \times (B + A \cot \theta + C \cot^2 \theta + D \cot^3 \theta) \operatorname{sen} \theta > 0$$

per tutti i valori di θ, da $\theta = m$ sino a $\theta = 2m$; e conseguentemente, siccome l'm dev'essere positivo e minore di un semiretto, come abbiamo già veduto nella proposizione quindicesima, e però $\operatorname{sen} \theta$ positivo; così la stabilità di cui si tratta richiede unicamente, che positiva sia la quantità

$$B + A \cot \theta + C \cot^2 \theta + D \cot^3 \theta,$$

ovvero $B + Ay + Cy^2 + Dy^3$.

Si ponga in quest'ultima espressione in luogo dei coefficienti A, B, C e D i loro valori in x esposti dianzi; e si otterrà

$$B + Ay + Cy^2 + Dy^3$$

eguale alla frazione seguente

$$\Big[2fx^2y^3 + \Big(2fx + 2(g-1)x^2 + 2f(g-1)x^3\Big)y^2 - \tfrac{1}{2}$$
$$+ fgx + (1-g)x^2 - fgx^3 + (g - \tfrac{1}{2})x^4$$
$$+ \Big(\tfrac{1}{2}f + (g-2)x + f(3g-1)x^2 + (2-3g)x^3 + f(\tfrac{1}{2}-g)x^4\Big)y\Big] : (1+x^2)^2.$$

Si tratta adunque di determinare il minimo valore della x ossia il massimo dell'angolo m, che riduce la quantità

$$2fx^2y^3 + \Big(2fx + 2(g-1)x^2 + 2f(g-1)x^3\Big)y^2 - \tfrac{1}{2}$$
$$+ fgx + (1-g)x^2 - fgx^3 + (g - \tfrac{1}{2})x^4$$
$$+ \Big(\tfrac{1}{2}f + (g-2)x + f(3g-1)x^2 + (2-3g)x^3 + f(\tfrac{1}{2}-g)x^4\Big)y$$

ad una funzione della y, la quale sia positiva per

tutti i valori d'y, da $y = \cot m$ sino ad $y = \cot 2m$, cioè da y eguale alla x medesima sino alla y eguale ad $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

Quest' ultima quantità in x ed y, da cui dipende attualmente la soluzione della proposta proposizione, è eguale al prodotto delle due seguenti

$$2y - x + \frac{1}{x},$$

$$fx^2y^2 + \tfrac{1}{2}\left(fx + (2g-2)x^2 + (2fg-1)x^3\right)y - \tfrac{1}{2}x + fgx^2 - (g-\tfrac{1}{2})x^3;$$

e per conseguenza il segno di essa dipenderà dai segni di queste ultime due; ma siccome la prima, cioè $2y - x + \frac{1}{x}$, è sempre positiva per tutti i valori dell'y compresi fra x ed $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, così la quantità di cui si parla sarà positiva, se positiva sarà la

$$fx^2y^2 + \tfrac{1}{2}\left(fx + (2g-2)x^2 + (2fg-1)x^3\right)y - \tfrac{1}{2}x + fgx^2 - (g-\tfrac{1}{2})x^3$$

secondo fattore di essa.

Passiamo adunque a determinare il minimo valore della x, che sostituito in questo fattore lo riduce ad una funzione d'y positiva per tutti i suddetti valori della medesima y, cioè per tutti i valori d'y, dall' x sino all' $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

Siccome per le terre ordinarie i due primi termini di quest' ultima espressione sono evidentemente positivi, così se saranno positivi quei due risultamenti, che otterransi, facendo in essa $y = x$, ed $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$,

nessun valore d' y, fra gl' infiniti compresi tra questi due medesimi, potrà annullare la stessa espressione, e molto meno renderla negativa: conseguentemente il maggiore dei minimi valori della x, che renderanno questi risultamenti entrambi positivi, sarà il dimandato.

Sostituendo x in vece d'y nell' espressione in quistione, si ottieue, dopo alcune riduzioni, la seguente

$$f(g+\tfrac{1}{2})x^3-\tfrac{1}{2}x^2+f(g+\tfrac{1}{2})x-\tfrac{1}{2},$$

ossia $f(g+\frac{1}{2})(1+x^2)x-\frac{1}{2}(1+x^2)$; cioè

$$\tfrac{1}{2}\Big((2g+1)fx-1\Big)(1+x^2):$$

quantità, che sarà positiva sempre che la x non sia minore di $\frac{1}{(2g+1)f}$. Così, sostituendo nella medesima espressione in luogo d' y, l' altro valore suddetto, cioè $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{x})$, si ha una quantità, che mediante varie riduzioni, si trova eguale alla semplicissima

$$x(xf-1)(1+x^2),$$

la quale sarà positiva, qualora la x sia maggiore di $\frac{1}{f}$.

Ma dei due numeri $\frac{1}{(2g+1)f}$, $\frac{1}{f}$, i quali sono i minimi valori della x, che rendono positivi i due suddetti resultati, il secondo è maggiore evidentemente del primo; adunque, il medesimo $\frac{1}{f}$ sarà il minimo valore richiesto della cotangente x; cioè quello che sostituito nella espressione in x, y proveniente da ϕ, somministrerà una espressione in y

positiva od almeno nulla, ma giammai negativa, per tutti gli infiniti valori d' y, da y eguale ad x medesima sino ad y eguale ad $\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Corollario I. Essendo x ossia $\cot m=\frac{1}{f}$, sarà $\tan g\, m=f$; ma l'f, come coefficente dell' attrito delle terre esprime la tangente dell' angolo d'inclinazione coll' orizzonte di quel piano a seconda del quale si dispone la superficie esteriore delle terre nel loro stato di equilibrio; adunque il minimo argine a cresta fra quelli, che hanno altezze eguali, e sono stabili rispetto ai moti di traslazione contemplati, dovrà avere le scarpe inclinate all' orizzonte, come si disporrebbero le terre componenti il medesimo, se fossero esse asciutte e prive di tenacità e bene stritolate: risultamento, che alla utilità riunisce la semplicità tanto desiderabile nella pratica.

Quindi prescindendo dalla tenacità delle terre, un argine a cresta, affinchè fosse stabile, dovrebbe avere ogni sua scarpa inclinata all' orizzonte non più di gradi trentasei, se sarà formato con terre forti od argillose interamente, e di gradi trenta se lo sarà con terre sabbiose; ammesso sempre che fossero esse asciutte e bene stritolate.

Corollario II. Essendo l' altezza di un argine a cresta eguale a $b \operatorname{sen} m$, e la base a $2b\cos m$, per l'argine qui sopra determinato sarà l' altezza eguale ad $\frac{fb}{\sqrt{(1+f^2)}}$, e la base a $\frac{2b}{\sqrt{(1+f^2)}}$; e però la sua altezza starà alla sua base geometricamente, come il coefficente stesso d' attrito della terra, cioè

l'f, al numero due astratto; in generale prossimamente per le terre ordinarie come tre ad otto; vale a dire, l'altezza dovrà essere tre ottavi della sua base.

L'area poi del profilo di un siffatto argine risulta eguale ad $\frac{fb^2}{1+f^2}$.

Osservazione. Le cose dette in questa proposizione sono appoggiate interamente alla ipotesi dichiarata nel principio della sua soluzione, cioè che la inclinazione delle scarpe dell' argine debba essere minore di un semiretto, condizione per altro necessaria, come risulta dalle cose precedenti; si può però desiderare di conoscere la relazione che dovrebbero avere le quantità f, g, come se fossero indipendenti, affinchè l' argine a cresta fosse il minimo fra quelli non soggetto alle rotture sino ad ora considerate. Ecco per tanto la ricerca di questa curiosa relazione.

Per iscoprire questa relazione; sia ABC (fig. 8) il profilo di un argine a cresta; e sia AE una sua sezione qualunque passante per A. Pongasi

$$AB = BC = b,\ BCA = m,\ EAC = \omega,$$

e si ritenga qui pure α eguale all'angolo avente f per tangente. Così chiamisi P il peso della porzione d'argine ABE, ed S la pressione esercitata dall' acqua sulla porzione BE della scarpa, supposto che la superficie dell'acqua medesima arrivi fino alla sommità B.

Evidentemente si avrà $BE = b\frac{\operatorname{sen}(m-\omega)}{\operatorname{sen}(m+\omega)}$,

$$P = g\cdot\tfrac{1}{2}BE\cdot BA \operatorname{sen} B = gb^2 \operatorname{sen} m \cos m \frac{\operatorname{sen}(m-\omega)}{\operatorname{sen}(m+\omega)},$$

$$S = \tfrac{1}{2} BE \cdot BE \operatorname{sen} m = \tfrac{1}{2} b^2 \frac{\operatorname{sen}^2 (m - \omega)}{\operatorname{sen}^2 (m + \omega)} \operatorname{sen} m \text{ , e}$$

$$\phi = P(f \cos \omega - \operatorname{sen} \omega) + S\Big(f \cos (m+\omega) - \operatorname{sen}(m+\omega)\Big),$$

e però

$$\phi = b^2 \operatorname{sen} m \frac{\operatorname{sen}(m-\omega)}{\operatorname{sen}(m+\omega)} \Big\{ g \cos m \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \omega)}{\cos \alpha}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \operatorname{sen}(m - \omega) \cdot \Big(f \cot (m+\omega) - 1 \Big) \Big\}.$$

Ora nel particolare argine a cresta di cui si tratta, l'angolo m è lo stesso di α, perciò in esso

$$\phi = \frac{b^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2 (\alpha - \omega) \operatorname{tang} \alpha}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \omega)} \Big\{ \frac{2g - 1}{\operatorname{tang} \alpha} + \cot (\alpha + \omega) \Big\}.$$

Conviene adesso cercare il massimo di quei valori di α, pe' quali il valore di ϕ si mantiene positivo o almeno non negativo per tutti i valori di ω da zero ad α. Si osservi perciò che ω è sempre minore di α, ed α di un retto, e però $\alpha + \omega$ di due retti; e per tanto qualunque siano α ed ω, il fattore

$$\frac{b^2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2 (\alpha - \omega) \operatorname{tang} \alpha}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \omega)}$$

del trovato valore di ϕ sarà sempre positivo, ed il segno di ϕ dipenderà da quello del fattore

$$\frac{2g - 1}{\operatorname{tang} \alpha} + \cot (\alpha + \omega).$$

Converrà adunque cercare il massimo di que' valori d'α, pei quali un tale fattore si mantiene positivo da $\omega = 0$ ad $\omega = \alpha$.

In questo fattore io osservo che $\cot (\alpha + \omega)$ è positivo allorchè $\omega = 0$, ma va continuamente diminuendo al crescere di ω, potendo anco divenir

negativo quando $\alpha + \omega$ cresca di un retto, e che il minimo valore che aver possa $\cot(\alpha + \omega)$ è quello che corrisponde all'ultimo limite di ω cioè ad $\omega = \alpha$; e però il minimo valore che potrà avere il fattore

$$\frac{2g-1}{\tang \alpha} + \cot(\alpha + \omega),$$

sarà quello che corrisponde ad $\omega = \alpha$, cioè sarà il valore

$$\frac{2g-1}{\tang \alpha} + \cot 2\alpha.$$

Pertanto finchè α sarà tale che questo valore sia positivo, saremo sicuri che tale sarà sempre anco ϕ per tutti i valori di ω compresi fra i due limiti suindicati; ma quando α sarà tale che un siffatto valore sia negativo, allora il valore di ϕ avrà necessariamente anco de' valori negativi. Nel considerare questo fattore

$$\frac{2g-1}{\tang \alpha} + \cot 2\alpha$$

si osserva, che aumentandosi l'angolo α, supposto sempre minore di un retto, ambedue i termini che lo compongono vanno diminuendo, e che il secondo può divenir negativo, e continuare ancora a diminuirsi senza limite fino a divenire infinito negativo. Vi sarà pertanto sempre un valore di α, il quale rende questa quantità eguale a zero, al di sotto del quale essa rimane positiva, e al disopra del quale essa è negativa. Questo valore di α è adunque precisamente quello che forma lo scopo delle nostre ricerche. Facciam adunque $\frac{2g-1}{\tang \alpha} + \cot 2\alpha = 0$, ed avremo immediatamente $\tang \alpha = \sqrt{4g-1}$, cioè $f = \sqrt{4g-1}$: relazione ricercata.

Ommetto qui varie riflessioni relative a quest'ultimo risultamento, perchè esse si presenteranno naturalmente a qualsivoglia lettore.

Proposizione diciottesima PROBLEMA.

Fra gli infiniti argini di eguali altezze e stabili, determinare quello della minima base, e però del minimo volume ossia il più economico; supposto che le sue scarpe facciano coll'orizzonte degli angoli semiretti?

L'argine richiesto abbia per profilo il trapezio $ABCD$ (fig. 9).

Nelle espressioni generali dei coefficienti A, B, C e D, già più volte citate, si faccia

$\cos m = \operatorname{sen} m = \frac{1}{\sqrt{2}}$; più $f = \frac{3}{4}$, $g = \frac{3}{2}$, valori molto prossimi a quelli usati ultimamente, e si avrà

$A = \frac{1}{16}(7ab\sqrt{2} - a^2 - 15b^2)$, $B = -\frac{5}{32}(a - b\sqrt{2})^2$,

$C = \frac{a}{32}(12b\sqrt{2} + a)$, e $D = \frac{3}{16}a^2$;

indi si pongano questi valori nel fattore seguente

$$B + Ay + Cy^2 + Dy^3$$

del valore di ϕ, dal segno del quale dipende anco quello di φ stesso; e si avrà

$$\frac{3}{16}a^2y^3 + \frac{a}{32}(12b\sqrt{2} + a)y^2 + \frac{1}{16}(7ab\sqrt{2} - a^2 - 15b^2)y - \frac{5}{32}(a - b\sqrt{2})^2,$$

ovvero

$$\frac{a^2}{32}\left[6y^3 + (12x\sqrt{2} + 1)y^2 + (14x\sqrt{2} - 2 - 30x^2)y - 5(1 - x\sqrt{2})^2\right];$$

ove x è qui posta invece di $\frac{b}{a}$. Quindi, l'attuale

ricerca sarà così ridotta allo scoprimento del maggiore valore positivo della x, il quale sostituito nella espressione

$$6y^3+(12x\sqrt{2}+1)y^2+(14x\sqrt{2}-2-30x^2)y-5(1-x\sqrt{2})^2$$

somministra una funzione della sola y, i cui valori corrispondenti a quelli di θ, che non sono maggiori di un semiretto nè minori di un semiretto più l'angolo CAD siano tutti positivi od al più qualcuno di essi nullo, cioè nessuno negativo.

Essendo in generale $\text{tang}\, CAD = \frac{b \,\text{sen}\, m}{a - b\cos m}$,

e però nel presente caso eguale ad $x:(\sqrt{2}-x)$, sarà

$$\text{tang}(45^\circ+CAD) = \frac{1+x:(\sqrt{2}-x)}{1-x:(\sqrt{2}-x)} = \frac{1}{1-x\sqrt{2}};$$

e conseguentemente $\cot(45^\circ+CAD)=1-x\sqrt{2}$. Per tanto, il valore della x, dimandato, dovrà avere la proprietà di ridurre la suddetta espressione formata colle x, y, a tale funzione della y, che si mantenga positiva per tutti i valori d'y dalla unità, che è la cotangente di un angolo semiretto sino ad $1-x\sqrt{2}$, che è la cotangente dell'angolo eguale ad un semiretto più il CAD.

Siccome nella espressione

$$6y^3+(12x\sqrt{2}+1)y^2+(14x\sqrt{2}-2-30x^2)y-5(1-x\sqrt{2})^2$$

sono i due primi termini positivi, e l'ultimo negativo, qualunque sia la x, così uno solo sarà quel valore positivo della y, che potrà annullare la medesima; ed in conseguenza il valore dimandato sarà

il minore dei maggiori valori della x, che avranno la proprietà di rendere positivi ambedue i resultati seguenti

$$36x\sqrt{2}-40x$$

$$6(1-x\sqrt{2})^2+(12x\sqrt{2}+1)(1-x\sqrt{2})^2$$
$$+(14x\sqrt{2}-2-30x^2)(1-x\sqrt{2})-5(1-x\sqrt{2}),$$

i quali si ottengono, facendo in detta espressione successivamente

$$y=1, \text{ ed } y=1-x\sqrt{2}.$$

Il primo di questi risultamenti è reso positivo evidentemente da tutti quei valori della x, che sono minori di $\frac{9}{10}\sqrt{2}$; ed il secondo, il quale è eguale ad

$$(1-x\sqrt{2})\Big((1+7x\sqrt{2})(1-x\sqrt{2})-1\Big),$$

sarà positivo, se tale sarà il suo fattore

$$(1+7x\sqrt{2})(1-x\sqrt{2})-1;$$

giacchè per la proposizione tredicesima dev'essere

$$a>b\sqrt{2}, \text{ ossia } 1-x\sqrt{2}>0.$$

Ma $(1+7x\sqrt{2})(1-x\sqrt{2})-1$ è eguale a $2x(3\sqrt{2}-7x)$; e quest'ultima quantità è resa positiva da tutti quei valori della x, che sono minori di $\frac{3}{7}\sqrt{2}$; adunque il secondo risultamento dei due qui sopra esposti sarà reso positivo da tutti i valori della x, che sono minori di $\frac{3}{7}\sqrt{2}$.

Ora, siccome $\frac{3}{7}\sqrt{2}$ è minore di $\frac{10}{9}\sqrt{2}$; così il valore dimandato della x, che dev'essere il minor di questi, sarà esso $\frac{3}{7}\sqrt{2}$. Vale a dire, sarà $\frac{3}{7}\sqrt{2}$, ossia prossimamente 0,606, il maggiore valore della x fra quelli, che sostituiti nella espressione

$$6y^3+(12x\sqrt{2}+1)y^2+(14x\sqrt{2}-2-30x^2)y-5(1-x\sqrt{2})^2$$

somministrano una funzione della sola y, di cui sono

positivi tutti i valori corrispondenti a quelli d'y medesima, maggiori di uno, e minori di $1-x\sqrt{2}$. Quindi, per essere $\frac{b}{a}=x$, e però $a=\frac{b}{x}$, sarà $3a\sqrt{2}=7b$; cioè per l'argine dimandato dovrà stare

$$b:a=3\sqrt{2}:7;$$

proprietà sufficiente per individuarlo e costruirlo immediatamente.

Corollario I. Si nomini α la CR altezza dell'argine dimandato; e sarà $b=\alpha\sqrt{2}$; e però $3a\sqrt{2}=7\alpha\sqrt{2}$, ossia $3a=7\alpha$; cioè in quest' argine starà l'altezza alla base geometricamente, come tre a sette; ossia la sua altezza sarà tre settimi della sua base, oppure la base sette terzi della sua altezza.

Corollario II. Essendo in generale la lunghezza del piano di un argine avente le scarpe inclinate coll'orizzonte di un angolo semiretto eguale evidentemente ad $a-b\sqrt{2}$, quello dell'argine superiormente determinato sarà eguale a

$$\tfrac{7}{3}\alpha-2\alpha=\tfrac{1}{3}\alpha;$$

cioè BC larghezza del suo piano sarà eguale ad un terzo della CR sua altezza.

Corollario III. Essendo pei corollari precedenti

$$CR:3=AD:7,\quad CR:3=BC:1,$$

sarà anco $AD:7=BC:1$; vale a dire, la larghezza del piano eguaglierà la settima parte della base.

Corollario IV. L'area di $ABCD$ profilo di quest' argine risulta eguale ad

$$(\tfrac{1}{3}\alpha+\tfrac{7}{3}\alpha)\tfrac{1}{2}\alpha=\tfrac{4}{3}\alpha^2;$$

cioè a quattro terzi del quadrato della sua altezza.

Osservazione I. Essendo

$$\text{tang}\, CAD = \frac{x}{\sqrt{2}-x} = \frac{3\sqrt{2}:7}{\sqrt{2}-3\sqrt{2}:7} = \tfrac{3}{4};$$

cioè la tangente dell'angolo CAD eguale all'attuale coefficiente f, la sezione AC sarà il piano di equilibrio delle terre componenti l'argine.

Osservazione II. Pel minimo argine stabile trovato in quest'ultima proposizione si ha tang $CAD = \frac{3}{4}$, $a = \frac{7}{3\sqrt{2}}b$, $BC = \frac{b}{3\sqrt{2}}$, l'area di $ABC = \frac{b^2}{12}$, ed il peso $ABC \cdot g = \frac{1}{8}b^2$; e però, l'eccesso φ relativo alla porzione $ABCE$ e proveniente da $ABC \cdot g$ peso di ABC sarebbe eguale ad

$$\tfrac{1}{8} b^2 (f \cos \omega - \text{sen}\, \omega),$$

ossia ad $\frac{1}{8} b^2 \left(f \cos(\theta - 45^\circ) - \text{sen}\,(\theta - 45^\circ)\right)$,

quantità la quale si riduce alla seguente

$$\tfrac{1}{8} b^2 (7 \cot \theta - 1) \frac{\text{sen}\, \theta}{4\sqrt{2}},$$

ponendo per f il suo valore $\frac{3}{4}$. Quindi l'eccesso suddetto, proveniente dalla sola porzione ACE e relativo al moto progressivo di questa porzione sulla sua base EA, risulterà eguale al valore di φ trovato qui sopra, meno

$\frac{b^2}{32\sqrt{2}}(7 \cot \theta - 1)\, \text{sen}\, \theta$; vale a dire sarà eguale a

$$\frac{b^2}{576\sqrt{2}}(13 - 176y + 553y^2 + 147y^3)\, \text{sen}\, \theta.$$

Ma $y = \frac{3}{20}$ rende quest'ultima quantità negativa, e lo stesso $y = \frac{3}{20}$ corrisponde ad una sezione intermedia fra le AC, AD; adunque l'argine $ABCD$, benchè sia tang CAD eguale all'attuale valore dell f, nulla-

dimeno esso, senza la porzione ABC non sarebbe stabile; ciò che è singolare, stantechè l'effetto della stessa porzione ABC è nullo pel suo moto progressivo secondo CA.

Osservazione III. Siccome le sezioni, che passano pel punto A, ed attraversano la porzione ABC, sono inclinate all' orizzonte più della CA, ed altre che attraversano la medesima porzione ABC, e segano la scarpa AB, possono godere di una analoga proprietà; così la stabilità della stessa porzione $ABCD$ dovrassi appoggiare interamente alla sola tenacità delle terre: si dica altrettanto della scarpa CD, quando ad essa non vi sia appoggiata l' acqua; come pure delle scarpe di qualunque terra ammucchiata, allorchè le scarpe del mucchio abbiano all'orizzonte una inclinazione maggiore di quella voluta dall' equilibrio ossia dalla naturale stabilità della terra proveniente dal solo attrito di essa.

Proposizione diciannovesima. PROBLEMA.

Trovare le dimensioni necessarie per un argine ordinario, affinchè l' acqua tenuta a segno da esso non faccia sdrucciolare qualunque sua porzione sulla rispettiva base verso la campagna esterna?

Il profilo dell' argine sia rappresentato dal trapezio $ABCD$ (fig. 10), la sezione qualunque dalla retta $A'E$, il pelo dell' acqua sostenuta dalla pa: conducasi l' orizzontale $A'D'$, e pongasi $AD = a$, $AB = CD = b$, $AA' = \lambda$, $aD = h$, $BAD = CDA = m$, e l' $EA'D' = \omega$.

Colle cose esposte nella proposizione undecima è facile a dimostrarsi che lo stato meccanico della porzione $A'BCE$ dipenderà dalla quantità seguente

$$g\left\{(a-2\lambda\cos.m)(b-\lambda)-(b-\lambda)^2\cos.m\right.$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-2\lambda\cos.m)^2\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}\,(m+\omega)}\Big\}(f\cos.\omega-\text{sen.}\,\omega)\,\text{sen.}\,m$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{h-\lambda-\frac{(a-2\lambda\cos m)\,\text{sen}\,\omega}{\text{sen}\,(m+\omega)}\right\}^2\Big(f\cos(m+\omega)-\text{sen}\,(m+\omega)\Big)\text{sen}\,m,$$

ovvero dalla sua equivalente

$$g\left\{(a-2\lambda\cos.m)(b-\lambda)-(b-\lambda)^2\cos.m\right.$$
$$-\tfrac{1}{2}(a-2\lambda\cos.m)^2\frac{\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}\,(m+\omega)}\Big\}\frac{\text{sen.}\,(\alpha-\omega)}{\cos.\alpha}\,\text{sen.}\,m$$
$$+\tfrac{1}{2}\left\{h-\lambda-\frac{(a-2\lambda\cos.m)\,\text{sen.}\,\omega}{\text{sen.}\,(m+\omega)}\right\}^2\frac{\text{sen.}\,(\alpha-m-\omega)}{\cos.\alpha}\,\text{sen}\,m.$$

Questa quantità si indicherà, per semplicità, col simbolo $\varphi(h,\omega,\lambda)$.

Evidentemente, affinchè la porzione $A'BCE$ non isdruccioli da E verso A' le dimensioni dell'argine dovranno esser tali da rendere positiva od almeno nulla la $\varphi(h,\omega,\lambda)$, per tutti i valori di h e λ dallo zero sino alla b, e di ω da quello che ha per tangente $\dfrac{(b-\lambda)\,\text{sen}\,m}{a-(b+\lambda)\cos m}$ a quello avente per tangente $\dfrac{\lambda\,\text{sen}\,m}{a-2\lambda\cos m}$.

Corollario I. Se nella espressione $\varphi(h,\omega,\lambda)$ si facesse $h=b$, e $\lambda=0$ si avrebbe l'espressione chiamata φ nella osservazione prima della proposizione undecima sopraccitata.

Corollario II. I valori di λ ed m corrispondenti ad un dato valore della h ed al minimo della $\varphi(h,\omega,\lambda)$ soddisferanno le due equazioni

$$\left(\frac{d\,\varphi}{d\,\omega}\right)=0\,,\quad \left(\frac{d\,\varphi}{d\,\lambda}\right)=0\,,$$

e renderanno positive le quantità

$$\left(\frac{d^2\varphi}{d\,\omega^2}\right),\ \left(\frac{d^2\varphi}{d\,\lambda^2}\right),\ \left(\frac{d^2\varphi}{d\,\omega^2}\right)\left(\frac{d^2\varphi}{d\,\lambda^2}\right)-\left(\frac{d^2\varphi}{d\omega d\lambda}\right)^2$$

o solamente due di esse e l'altra nulla, come si sa. Dimodochè la massima altezza che potrà avere l'acqua sostenuta da un dato argine, si otterrà moltiplicando per sen.m la h determinata colle equazioni

$$\left(\frac{d\,\varphi}{d\,\omega}\right)=0\,,\quad \left(\frac{d\,\varphi}{d\,\lambda}\right)=0\,,\quad \varphi\,(h\,,\omega\,,\lambda)=0\,.$$

Queste medesime equazioni daranno i valori delle λ, ω rispondenti a quella porzione d'argine, che sarà appena in equilibrio sulla rispettiva base.

Corollario III. Negli argini a profili simili, e per cui le altezze delle acque siano proporzionali a due linee omologhe di essi, i due valori di $\varphi\,(h\,,\omega,\,\lambda)$ corrispondenti a due porzioni simili e similmente poste, sono entrambi positivi, nulli, ovvero negativi; cioè si accordano nell'aver segni simili e nell'esser nulli. Diffatto, si ritengano per uno di siffatti argini le denominazioni sopra stabilite, e si indichino colle a', b', λ', h', m, ω, φ' le analoghe quantità per l'altro di essi; più si ponga $a'=ac$, ove c esprime il rapporto fra le due basi dei profili di essi argini; e si avrà anco $b'=bc$, $h'=hc$; e conseguentemente $\varphi'=c^2\varphi$. Quindi φ' e φ saranno ambedue positivi, nulli, o negativi; appunto come si è detto.

Corollario IV. Gli argini di cui si parla nel corollario antecedente hanno le sezioni a cui corrispondono i rispettivi minimi valori degli eccessi φ , φ' *similmente situate.* Questa verità è una immediata conseguenza della stessa equazione $\varphi' = c^2 \varphi$.

Osservazione I. Questi due ultimi corollari hanno luogo anco nel caso che le due scarpe di ciascun degli argini a profili simili abbiano coll' orizzonte inclinazioni differenti l' una dall' altra.

Osservazione II. Se sull' argine $ABCD$ (fig. 9) appena in equilibrio si dovesse costruire un arginello $Ccnr$, od anco il $Ccb'B'$ ossia costruire il nuovo argine $Dcb'A$; affinchè il corpo di terra risultante avesse una stabilità almeno come l' argine $ABCD$ bisognerebbe ingrossarlo in modo, che la base di questo nuovo corpo fosse la linea Da, determinata dalla retta cha parallela alla CA, coll' unire all' argine vecchio almanco il corpo di terra Aha. Se poi si volesse un argine della altezza Cr, e precisamente stabile come il primo $ABCD$ esso si determinerebbe col condurre la ab parallela alla AB, e la cb alla CB; giacchè l' argine avente per profilo $abcD$ sarebbe rispetto alla stabilità a circostanze similissime al vecchio $ABCD$ pei corollari ultimi qui sopra esposti.

Da questa osservazione discende che gli argini presso ai caseggiati dovranno avere una base maggiore di quella che hanno altrove, non solo per maggior sicurezza dei fabbricati medesimi, ma anco perchè in questi luoghi si richieggono di una altezza più grande che negli altri punti, come già si disse al principio di questa parte.

Essendo il profilo $abcD$ simile all' $ABCD$ si avranno le proporzioni

$$CR : cr = AD : aD \,, \quad CR : cr = BC : bc \,;$$

e però l' $aD = \frac{cr \cdot AD}{CR}$, e la $bc = \frac{cr \cdot BC}{CR}$;

cioè si avrebbe la base ed il piano del nuovo argine date per le simili linee del vecchio e l' altezza del nuovo medesimo.

Similmente si avrebbe anco

$$\overline{CR}^2 : \overline{cr}^2 = ABCD : abcD \,, \text{ ossia } abcD = \frac{\overline{cr}^2}{\overline{CR}^2} \cdot ABCD;$$

e però anco $abcD - ABCD = \frac{\overline{cr}^2 - \overline{CR}^2}{\overline{CR}^2} \cdot ABCD$;

vale a dire l' area del profilo $abcCBA$ del nuovo corpo di terra da unirsi al vecchio argine per formare il nuovo $abcD$.

Osservazione III. Quando la $\phi\,(h, \omega, \lambda)$ risultasse positiva non verrebbe di conseguenza lo sdrucciolamento nell' acqua della porzione corrispondente d'argine, come si potrebbe credere a prima giunta: onde si concepisca questa importante verità, si esprimano colle N, Q, V, ed O delle quantità per la sezione a cui corrisponde la $\phi\,(h, \omega, \lambda)$ attuale, affatto analoghe a quelle indicate colle medesime lettere nelle proposizioni nona e decima rispetto alla sezione AE (fig. 8). Evidentemente il valore del ϕ qui sopra contemplato sarà $(N + V)f - V + O$; ed il valore del ϕ analogo relativo al moto affatto contrario risulterà

$$(N + V)f + V - O \,,$$

il quale, quando sia negativo il primo, non è po-

sitivo, se la O sola non è maggiore di $(N+V)f$; quindi se la porzione d'argine alla quale risponde il suddetto φ negativo non isdrucciolerà verso la campagna esterna, essa non isdrucciolerà neppure nell' acqua qualora la sola forza O non superi la somma $(N+V)f+V$, il che difficilmente accadrà per gli argini ordinarj; dimodochè tutte quelle porzioni d'argine per le quali $(N+V)f-Q+O$ sarà negativa, e la O minore della $(N+V)f+Q$ saranno stabili rispetto al moto di traslazione di cui si parla.

Osservazione IV. Ordinando l'espressione generale di $\varphi(h, \omega, \lambda)$ sopra trovata, rispetto alla h si ha

$$\varphi(h, \omega, \lambda) = A - Bh - Ch^2,$$

dove A, B, e C non contengono la h, e le B, C sono in generale positive. Questa espressione della $\varphi(h, \omega, \lambda)$ ci insegna che col diminuire la h cresce la $\varphi(h, \omega, \lambda)$, più che le variazioni della φ stessa e della h seguono la stessa legge che soffrano le coordinate della parabola conica avente per equazione

$$\varphi = A - Bh - Ch^2,$$

supposto che le stesse φ ed h esprimano le sue coordinate.

Osservazione V. Se nella ricerca dello stato meccanico della porzione d'argine $A'BCE$ (fig. 10) si volesse contemplare la tenacità della terra, supposto essa proporzionale alla estensione della sezione $A'E$ ed indipendente dal peso della stessa porzione $A'BCE$, invece della quantità $\varphi(h, \omega, \lambda)$ converrebbe considerare la

$$\varphi(h, \omega, \lambda) + \beta \cdot A'E,$$

la quale eguaglia evidentemente

$$\phi\,(h\,,\,\omega\,,\,\lambda)\;+\;\beta\,\frac{a-2\lambda\cos m}{\operatorname{sen}(m+\omega)}\operatorname{sen} m\;:$$

dove β esprime un coefficiente costante, il quale rigorosamente dovrebbe variarsi indefinitivamente per una stessa terra, come si è detto già superiormente.

Si potrà anco, per gli usi ordinarj, comprendere l'azione della tenacità in quella dell'attrito, col prendere per coefficiente d'attrito, non quello che avrebbe luogo se le terre fossero asciutte e stritolate perfettamente, ma bensì un altro più grande scelto giudiziosamente; benchè a tutto rigore ciò sia assolutamente incoerente come è facile a comprendersi.

Osservazione VI. Non isviluppo le cose esposte nella qui proposta proposizione, e in alcuni suoi corollari, perchè i calcoli risulterebbero complicatissimi; e passo in vece ad esporre altre proposizioni colle quali si arriva insensibilmente alle stesse conseguenze alle quali si arriverebbe cogli sviluppi medesimi.

Proposizione ventesima. Teorema.

Se la retta che unisse il punto della scarpa interna comune al pelo dell'acqua, col termine esteriore della base dell'argine risulterà maggiore dell'angolo di equilibrio della terra componente l'argine, varie porzioni d'argine potranno sdrucciolare in basso delle rispettive basi verso la campagna esterna.

$ABCD$ (fig. 11) esprima il profilo dell'argine, pa il pelo dell'acqua tenuta a segno da esso, AT

la retta che fa colla AD l'angolo eguale a quello di equilibrio della terra componente l'argine medesimo, cioè l'angolo superiormente denominato α.

Si unisca la pA, ed anco la EA avente un termine in A e l'altro nel punto E della pT; e nel valore di $\varphi(h, \omega, \lambda)$ trovato nella precedente proposizione si faccia $\lambda = 0$, e si ritenga $\omega = EAD$, ed $h = Dp$.

Essendo in questo caso

$$\varphi = A\,\text{sen}\,(\alpha - \omega) + B'\text{sen}\,(\alpha - m - \omega),$$

dove A e B sono due quantità positive necessariamente, più ω maggiore di TAD ossia dell' α, i seni degli angoli $\alpha - \omega$, $\alpha - m - \omega$ saranno ambedue negativi; e però ecc. Questa proprietà si verificherà anco per infiniti valori di ω e di λ ritenuta l'espressione $\phi(h, \omega, \lambda)$: tutte queste conseguenze sono per sè stesse evidentissime.

Proposizione ventunesima. Teorema.

Se la retta che unisce quel punto della scarpa che è comune al pelo della massima altezza dell'acqua, al vertice inferiore ed esterno del profilo corrispondente dell' argine, risulterà eguale o minore di quello di equilibrio della terra componente l' argine stesso, nessuna porzione d' argine, analoga a quelle sin qui considerate sdrucciolerà sulla rispettiva base verso la campagna esterna.

Per procacciare alla soluzione di questa proposizione la maggiore chiarezza distinguerò varj casi. Primieramente, il profilo dell' argine sia espresso

dall' $ABCD$ (fig. 12), il pelo dell' acqua dalla Ca; e l'angolo CAD sia eguale all' α: nessuna porzione di quest' argine analoga alla $ABCE$ sdrucciolerà in basso della EA.

In questo caso sarà $\lambda = 0$, $h = b = \dfrac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(m+\alpha)}$,

e però

$$\varphi = i^2 g \left\{ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+m)} - \frac{\cos m \operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2(m+\alpha)} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(m+\omega)} \right\} \frac{\operatorname{sen}(\alpha-\omega)}{\cos\alpha} \operatorname{sen} m$$

$$+ \frac{1}{2} a^2 \left\{ \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha+m)} - \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(m+\omega)} \right\}^2 \frac{\operatorname{sen}(\alpha-m-\omega)}{\cos\alpha} \operatorname{sen} m :$$

e però sarà vera l'anzi enunciata determinazione, se questa quantità sarà positiva per tutti i valori dell' angolo ω dallo zero sino all' α.

Il valore del φ qui esposto si riduce facilmente al prodotto di

$$g\Big(2\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \operatorname{sen} m \operatorname{sen}^2(m+\omega) - \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}^2(\alpha+m) \operatorname{sen}(m+\omega) \Big)$$

$$+ \operatorname{sen}^2 m \operatorname{sen}(\alpha-\omega) \operatorname{sen}(\alpha-m-\omega),$$

in $a^2 \operatorname{sen} m \operatorname{sen}(\alpha-\omega) : 2\cos\alpha \operatorname{sen}^2(\alpha+m) \operatorname{sen}^2(m+\omega)$,

il qual prodotto equivale a quello delle quantità

$$\Big(\alpha m^3 + (1-g)m^2 - g\alpha^2\Big)\omega^2 - \Big((g-1+\alpha^2)m^2 + 2\alpha(1-g)m + g\alpha^2\Big)m\omega$$

$$+ \alpha m^2 (2gm - m + \alpha)$$

$$a^2 \operatorname{sen} m \cos^3 m \cos\alpha \cos^2\omega \operatorname{sen}(\alpha-\omega) : 2\operatorname{sen}^2(\alpha+m) \operatorname{sen}^2(m+\omega),$$

dove le lettere α, m, ω contenute nella prima di queste quantità sono poste rispettivamente in luogo di $\tan\alpha$, $\tan m$, $\tan\omega$.

Ora la verità della suddetta determinazione è ridotta a dimostrare che sono positivi tutti i valori di

$$\left(\alpha m^3+(1-g)\,m^2-g\alpha^2\right)\omega^2-\left((g-1+\alpha^2)m^2+2\alpha\,(1-g)m+g\alpha^2\right)m\omega$$
$$+\alpha m^2\,(2gm-m+\alpha)$$

corrispondenti a quelli di ω dallo zero sino all'α.

Si ponga perciò in quest' ultima espressione in luogo della ω, l' $\frac{1}{y}$, e si avrà, ommettendo il fattore $\frac{1}{y2}$,

$$\alpha m^3+(1-g)\,m^2-g\alpha^2-\left((g-1+\alpha^2)\,m^2+2\alpha\,(1-g)\,m+g\alpha^2\right)my$$
$$+\alpha m^2\,(2gm-m+\alpha)\,y^2\,;$$

quantità la quale non dovrà aver nessun valore negativo per quelli d'y maggiori od eguali ad $\frac{1}{\alpha}$. Fatto ciò, si sostituisca in quest' ultima quantità in vece d'y il binomio $z+\frac{1}{\alpha}$, e si otterrà, tralasciando qui pure il fattore $\frac{1}{z^2}$, la seguente

$$g\,(m-\alpha)\,(m+\alpha)^2+m\,\alpha\left(m^2(3g-1-\alpha^2)+g\alpha\,(2m-\alpha)\right)z$$
$$+\alpha^2m^2\left((2g-1)\,m+\alpha\right)z^2,$$

la quale, affinchè abbia luogo la dichiarazione di cui si tratta, non dovrà avere nessun valore negativo corrispondente a valori positivi della z. Ma questa proprietà ha visibilmente luogo per le terre ordinarie, stantechè $m>\alpha$, e $g>1$; adunque nessun valere di ω, dallo zero sino all' α, può rendere la ϕ esposta superiormente negativa; e pertanto la porzione d'argine $ABCE$ non isdrucciolerà in basso della EA sua base.

In secondo luogo: se il pelo dell'acqua fosse la pq, cioè se $h < \frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(m + \alpha)}$, il valore del $\varphi(h, \omega, \lambda)$ corrispondente risulterebbe maggiore di quello considerato qui sopra; e però neppure in questo caso la porzione $ABCE$ sdrucciolerà in giù della EA: tutto ciò è per sè evidente.

In terzo luogo, ritenuto lo stesso argine considerato qui sopra, passiamo a considerare lo sdrucciolamento sulla EA' della porzione $A'BCE$. Si tiri l'orizzontale ad, e si faccia l'angolo cad eguale all'α; e si avrà la porzione d'argine $aBcd$ affatto simile all' $ABCD$ dei casi precedenti.

Se l'acqua si appoggiasse alla ce, essa non sarebbe atta a produrre sdrucciolamento lungo la ea della porzione $aBce$; ma la difficoltà di smovere la porzione $aBCE$ è maggiore di quella relativa alla $aBce$, e l'azione dell'acqua sulla CE pel contrario è minore di quella che si eserciterebbe sulla ce; adunque neppure la porzione $aBCE$ non isdrucciolerà sulla rispettiva base Ea.

Da questo caso ne discende anco, che lo sdrucciolamento in quistione non potrà aver luogo ne anco nei casi, che l' argine abbia un'altezza minore o maggiore di quello contemplato, purchè nel secondo di questi due casi, la h non sia maggiore di $\frac{a \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + m)}$.

Passo ora a dimostrare che dal complesso delle azioni che hanno luogo sulle porzioni Cae (fig. 13), $CBED$ dell'argine $ABCD$ analogo a quello contemplato sopra non ne può emergere sdrucciolamento

a seconda delle rette ea, DE; cioè per la prima porzione da e verso a, e per la seconda da D verso E: e siccome la prima di queste asserzioni è facilissimamente concepita, senza ricorrere a' calcoli, così mi occuperò solamente della seconda.

Per questo caso, ritenute tutte le denominazioni usate nel primo dei sopra trattati, colla sola differenza che l' ω indichi qui l'angolo EDA, si ha per ϕ il valore

$$g\,\frac{a^2 \operatorname{sen} m}{2}\left\{\frac{2 \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}^2(\alpha+m)} - \frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(m+\omega)}\right\}\frac{\operatorname{sen}(\alpha+\omega)}{\cos\alpha}$$
$$+\frac{a^2}{2}\,\frac{\operatorname{sen}^2\alpha\operatorname{sen} m\operatorname{sen}(\alpha+\omega-m)}{\cos\alpha\operatorname{sen}^2(\alpha+m)},$$

il quale facilmente si riduce al prodotto delle due quantità

$$m\alpha^2(2gm-m+\alpha)+\left(g(m^2-\alpha^2)+\alpha^2+m^2\alpha^2\right)\alpha\omega$$
$$+\left(\alpha^2+\alpha^3 m-(\alpha^2+m^2)g\right)\omega^2,$$

$$a^2\operatorname{sen} m\cos^2 m\cos^2\alpha\cos^2\omega\operatorname{sen}(\alpha+\omega-m)$$
$$:2\operatorname{sen}(m+\omega)\operatorname{sen}^2(\alpha+m);$$

dove le m, α, ω che entrono nella prima di queste quantità sono qui pure poste rispettivamente invece di tang m, tang α, tang ω. Adunque nessuna porzione d'argine analoga alla $EBCD$ sdrucciolerà sulla rispettiva base da D verso E, qualora nessun valore d' ω dallo zero all' α renderà negativa la

$$m\alpha^2(2gm-m+\alpha)+\left(g(m^2-\alpha^2)+\alpha^2+m^2\alpha^2\right)\alpha\omega$$
$$+\left(\alpha^2+\alpha^3 m-(\alpha^2+m^2)g\right)^2.$$

Trattando quest' ultima espressione come si è trattata la sua analoga nel primo caso, si trova che avrà luogo l' anzifatta dichiarazione, purchè nessun valore positivo della z possa rendere negativa la quantità

$$m\alpha^2(2gm-m+\alpha)+\left(g(m^2-\alpha^2)+\alpha^2+m^2\alpha^2\right)\alpha^2$$
$$+\left(\alpha^2+\alpha^3 m-(\alpha^2+m^2)g\right)\alpha^2$$
$$+\left\{2m\alpha^2(2gm-m+\alpha)+\left(g(m^2-\alpha^2)+\alpha^2+m^2\alpha^2\right)\alpha^2\right\}\alpha z$$
$$+m\alpha^4(2mg-m+\alpha)z^2:$$

proprietà che ha ora evidentemente luogo.

Se il pelo dell' acqua fosse pq, o la sezione fosse aE (fig. 12), o l' argine avesse un' altezza per cui risultasse $b>\frac{a\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\alpha+m)}$, ma che l' acqua sostenuta non avesse un' altezza maggiore di $a\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,m:\text{sen}\,(\alpha+m)$, ovvero fosse $b<\frac{a\,\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,(\alpha+m)}$, ed h qualunque, facilmente si dimostrerebbe colla scorta del caso qui sopra sviluppato, che nessuna porzione d' argine verrebbe sportata verso la campagna esterna sulla rispettiva base.

Osservazione. L' argine $ABCD$ (fig. 12) dà

$AD:CD=\text{sen}\,(\alpha+m):\text{sen}\,\alpha$

$CD:BC=\text{sen}\,\alpha:\text{sen}\,(m-\alpha)$; e però sarà

$AD:BC=\text{sen}(\alpha+m):\text{sen}(m-\alpha)=\cot\alpha+\cot m:\cot\alpha-\cot m.$

Quindi siccome l'altezza del medesimo argine eguaglia

$\frac{a \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} m}{\operatorname{sen}(\alpha + m)} = \frac{AC}{\cot \alpha + \cot m}$; così si avrà

$\frac{AD}{\cot \alpha + \cot m} = \frac{FC}{\cot \alpha - \cot m} =$ all' altezza dell' argine: proprietà sufficiente per individuare l'argine stesso.

Quest' ultime proprietà danno l' area del profilo $ABCD$ eguale al prodotto di $\frac{1}{2} \cot \alpha$ nel quadrato della altezza dello stesso profilo.

Proposizione ventiduesima. Problema.

Trovare la relazione necessaria alle parti dell' argine $ABCD$ (fig. 14), perchè la sua porzione qualunque $ABCE$ non sia ribaltata o rovesciata intorno ad A; avuto riguardo, tanto al peso della porzione stessa $ABCE$, quanto alla pressione dell'acqua sulla scarpa CE?

Si unisca il punto A al punto e di mezzo della ED; si faccia HE eguale ad un terzo della EC; si tiri AP perpendicolare alla PH prolungamento della SH direzione della risultante delle pressioni dell' acqua sulla CE; Am perpendicolare alla CD; le EF, ef entrambi perpendicolari alla AD; la gh anch' essa perpendicolare alla AD e condotta dal punto g centro di gravità del triangolo AED. Infine, si ritenga $AD = a$, $CD = AB = b$, l' angolo $CDA = BAD = m$; ed S per indicare la pressione dell' acqua sulla scarpa CE; più pongasi $ED = u$.

Evidentemente sarà

$Ah = \frac{2}{3} Af = \frac{2}{3} a - \frac{1}{3} u \cos m$,

$AP = HD - mD = \frac{1}{3} b + \frac{2}{3} u - a \cos m$,

$S = \frac{1}{3}(b^2 - 2bu + u^2) \operatorname{sen} m$, $AED = \frac{1}{2} au \operatorname{sen} m$, in fine $ABCD = (ab - b^2 \cos m) \operatorname{sen} m$.

E però il momento del peso della porzione d'argine $ABCE$ rispetto al punto A, cioè $g \cdot ABCD \cdot \frac{1}{2} AD - g \cdot AED \cdot Ah$ sarà eguale a

$$\frac{\operatorname{sen} m}{6}\left(3abg(a-b\cos m)-2a^2gu+agu^2\cos m\right);$$

e quello della risultante delle pressioni esercitate dall' acqua sulla scarpa CE, che è espresso dal prodotto di S in AP, sarà eguale a

$$\frac{\operatorname{sen} m}{6}\left(b^2(b-3a\cos m)+6abu\cos m-3(b+a\cos m)u^2+2u^3\right).$$

Quindi, affinchè l'argine sia stabile rispetto a questo moto di rotazione, cioè affinchè non venga ribaltata nessuna sua porzione analoga alla $ABCE$ intorno ad A, dovrà essere la prima di queste ultime quantità maggiore od almeno eguale all' altra; o ciò che è lo stesso, le sue dimensioni non dovranno rendere negativa la quantità seguente

$$3a^2bg-3ab^2(g-1)\cos m-b^3-2a(ag+3b\cos m)u$$
$$+(ag\cos m+3a\cos m+3b)u^2-2u^3;$$

giacchè l' altro fattore $\frac{1}{6}$ sen m sarà naturalmente sempre positivo.

Osservazione I. Se l' acqua non arrivasse sino al ciglio interno dell' argine, chiamata R la quantità analoga a quest' ultima trovata e relativa al moto di rotazione di qualsivoglia sezione, e μ l' altezza dell' acqua sulla base dell' argine, si troverebbe

$$R=A+B\mu+C\mu^2+D\mu^3,$$

dove le A, B, C, D non contengono la μ.

Quest' ultima espressione ci insegna, che, variando l' altezza dell' acqua, varia anco la stabilità della porzione a cui si riferisce la stessa espressione R; più che le variazioni di questa e della altezza del-

l' acqua sono quelle delle coordinate della linea espressa dall' equazione

$$R = (A + B\mu + C\mu^2 + D\mu^3)\,\frac{\operatorname{sen} m}{6}$$

purchè R e μ esprimano le coordinate stesse.

Osservazione II. Se si volesse aver riguardo anco alla tenacità della terra, in questo luogo converrebbe considerare la quantità

$$R + \tfrac{1}{2}\beta\cdot\overline{A'E}^2 \text{ (fig. 11), cioè } R + \tfrac{1}{2}\beta\,\frac{(a - 2\lambda\cos m)^2}{\operatorname{sen}^2(m+\omega)}\operatorname{sen}^2 m,$$

invece della $\frac{\operatorname{sen} m}{6}(A + B\mu + C\mu^2 + D\mu^3)$.

Qui, pei casi nei quali non si richiederà una grande esattezza, si potrà ommettere di introdurre il nuovo termine $\frac{1}{2}\beta\,\frac{(a - 2\lambda\cos m)^2}{\operatorname{sen}^2(m+\omega)}\operatorname{sen}^2 m$, col supporre giudiziosamente il peso specifico della terra maggiore dell' effettivo, sebbene anco questa sostituzione a rigore non sia ammissibile.

Osservazione III. Si potrebbero qui esporre rispetto al moto di rotazione varie proposizioni analoghe a quelle esposte rispetto al moto di traslazione; ma siccome le dimensioni necessarie, perchè non vi sia moto di traslazione negli argini di terra, rendono impossibile il moto di rotazione, come sotto si vedrà; così rispetto a quest' ultimo moto, mi limiterò ad esporre le seguenti due proposizioni, dalle quali si ha una conferma di questa medesima osservazione; e nello stesso tempo dalle soluzioni di esse si vedrà anco, come si potrebbero trattare le altri proposizioni relative a quest' ultimo medesimo moto ed analoghe a quelle trattate per rispetto al moto di traslazione, ciò che può essere utile per altre occasioni.

Proposizione ventitreesima. PROBLEMA.

Quale è la maggiore inclinazione coll' orizzonte, che possono avere le scarpe di un argine a cresta; senza porre nessuna sua porzione esistente sopra un piano condotto per A (fig. 7) in pericolo di essere rovesciata intorno al punto A medesimo?

Essendo l' argine a cresta, sarà $a = 2b\cos m$; e però l' espressione qui sopra trovata, che non dev' essere negativa per qualunque porzione ACE, divisa per b^3, si ridurrà in questo caso alla seguente

$$-1 + 6(g+1)\cos^2 m - 4(2g+3)y\cos^2 m$$
$$+ \left(3 + (2g+6)\cos^2 m\right)y^2 - 2y^3;$$

ove l' y è qui posta per semplicità in luogo di $\frac{u}{b}$.

Quest' ultima espressione è evidentemente eguale ad

$$(y-1)\left(1+y-2y^2+(2gy+6y-6g-6)\cos^2 m\right),$$

ossia a quest' altra

$$(1-y)\left((2y+1)(y-1)+2\left(g(3-y)+3(1-y)\cos^2 m\right)\right).$$

Per tanto, siccome l' y dev' esser positivo e minore di $\frac{b}{b} = 1$; così la presente stabilità richiederà unicamente, che sia positivo od al più eguale a zero il fattore

$$-(2y+1)(1-y) + 2\left(g(3-y) + 3(1-y)\cos^2 m\right).$$

Quindi l' inclinazione dimandata sarà quella corrispondente al minimo valore di $\cos m$, fra gl' infiniti, che rendono l' espressione

$$2\left(g\,(3-y)+3\,(1-y)\right)\cos^2 m-(2y+1)\,(1-y)$$

o positiva ovvero nulla per tutti quei valori positivi d' y, che non sono maggiori della unità.

Per iscoprire questo valore del coseno dell' angolo m, si dia a quest' ultima relazione la forma

$$\cos^2 m =, >\tfrac{1}{2}\,\frac{(1-y)\,(1+2y)}{3\,(1-y)+g\,(3-y)}\,;$$

ciò che è permesso, stante che la quantità $3(1-y)+g(3-y)$ è positiva entro i termini d' y positivo e non maggiore dell' unità; e si ponga per semplicità $1-y=z$, ed essa si ridurrà alla seguente

$$\cos^2 m =, >\tfrac{1}{2}\,\frac{3z-2z^2}{3z+gz+2g}\,.$$

Nel secondo membro di questa relazione, ai due suddetti limiti dei valori d' y corrispondono reciprocamente quelli di z non maggiore dell' unità e positivi.

Ma fra gli infiniti valori della z compresi tra l' unità positiva e lo zero avvi

$$z=(-2g+\sqrt{7g^2+9g}):(3+g)\,,$$

il quale corrisponde al massimo valore della espressione, che costituisce il secondo membro dell' ultima relazione; e somministra per questo medesimo massimo valore la quantità

$$\left(-2g+\sqrt{7g^2+9g}\right)^2:(3+g)^2\cdot 2g\,;$$

adunque per la stabilità in questione sarà sufficiente, che si abbia

$$\cos^2 m>\left(-2g+\sqrt{7g^2+9g}\right)^2:2g\,(3+g)^2,$$

ovvero $\cos m>\left(-2g+\sqrt{7g^2+9g}\right):(3+g)\sqrt{2g}\,.$

Vale a dire, il coseno dell' angolo d' inclinazione coll' orizzonte di ogni scarpa dell' argine a cresta di cui si parla non dovrà essere minore di

$$\left(-2g+\sqrt{7g^2+9g}\right):(3+g)\sqrt{2g}=\frac{3}{2\sqrt{2g+\sqrt{14g+18}}}.$$

Quindi quest' ultima quantità sarà il minimo valore del coseno dimandato; e per conseguenza sarà il valore del coseno dell' angolo della maggiore inclinazione, che potranno avere coll' orizzonte le scarpe di un argine a cresta; perchè nessuna di quelle sue porzioni già più volte considerate sia ribaltata intorno al vertice dell' angolo esteriore della base del suo profilo.

Corollario. L' argine qui determinato ha la base che sta alla altezza come il numero sei sta alla quantità $\sqrt{(22g+9+8\sqrt{7g+9})}$; e però, per essere $g>1$, la sua altezza sarà maggiore della sua base.

Osservazione I. È facile a vedersi che la quantità

$\frac{1}{2\sqrt{g}}$ è maggiore della $\frac{3}{2\sqrt{2g+\sqrt{14g+18}}}$,

semprechè sia $73g^2+270g>81$. Quindi l'argine determinato nella osservazione della proposizione diciassettesima sarà anco stabile rispetto al rovesciamento considerato qui sopra.

Osservazione II. Sia $g=1$, ed avremo

$$\frac{3}{2\sqrt{2g+\sqrt{14g+18}}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{2}=0{,}353554=\cos 69^\circ 18'.$$

Per tanto, quando $g=1$, si avrebbe stabilità ogni

qualvolta si avesse $m < 69^\circ\ 18'$. Ma nelle terre ordinarie si ha $g > 1$, e però

$$\frac{3}{2\sqrt{2g}+\sqrt{14g+18}} < \tfrac{1}{4}\sqrt{2} \text{ ossia di } \cos 69^\circ\ 18',$$

e conseguentemente eguale al coseno di un angolo maggiore di $69^\circ\ 18'$. Adunque gli argini di terra ordinaria, ogni qualvolta abbiano le scarpe inclinate all'orizzonte non più di $69^\circ\ 18'$ saranno sicurissimi dal ribaltamento in quistione.

Osservazione III. Siccome l'ordinaria inclinazione delle scarpe degli argini a cresta, e molto più quella che ad esse si dovrebbe dare onde allontanare ogni pericolo di qualunque rottura che potesse aver origine dai moti di traslazione, sono grandemente minori di sessantanove gradi e diciotto minuti primi, che è la maggiore inclinazione trovata dianzi; così in quest'ultimo risultamento si incomincia ad avere, come ho detto, che sarebbe accaduto, una conferma della osservazione fatta prima di esporre il dato di quest' ultima proposizione.

Proposizione ventiquattresima. Teorema.

Se un argine è stabile rispetto al moto di traslazione considerato nelle proposizioni trattate superiormente, esso sarà stabile anco per rispetto a quello di rotazione di cui si parla.

Il profilo dell' argine sia $ABCD$ (fig. 14).

Essendo quest' argine stabile rispetto al moto di traslazione, la tangente dell' angolo CAD non sarà maggiore del coefficente d' attrito, f; cioè questa

tangente sarà minore od al più eguale all' f, come abbiamo veduto nelle proposizioni ventesima e ventunesima.

Onde procacciare alla dimostrazione della presente proposizione la maggiore chiarezza io la dividerò in tre parti; primo dimostrerò che l'argine avente per profilo il solo triangolo ACG, ove la GC è verticale, l' angolo CAG ha per tangente f, è stabile rispetto al moto di rotazione, cioè che il momento rispetto al punto A della sua porzione ACM è maggiore di quello della pressione esercitata dall' acqua sulla CM: secondo, che, se è stabile l' argine ACG, lo sarà anco l' $ABCD$: in terzo ed ultimo luogo dimostrerò, che una simile proprietà ha luogo per l' argine avente il profilo $A'B'CD$ equiangolo e di eguale altezza dell' $ABCD$.

La retta AM esprima una qualunque di quelle sezioni dell' argine ACG, che passano per A; e si ponga $AG = e$, $GM = x$.

Essendo tang. $CAG = f$, sarà $CG = ef$, $CM = ef - x$; e però il momento del peso della porzione d'argine ACM, rispetto al punto A, eguaglierà $\frac{1}{3}e^2(ef- \quad)g$; e quello della pressione esercitata dall'acqua sulla CM, il quale è espresso dal prodotto di

$$\tfrac{1}{2}\overline{CM}^2 \text{ in } GM + \tfrac{1}{3}MC = \tfrac{1}{3}(ef+2x), \text{ sarà eguale ad}$$
$$\tfrac{1}{6}(ef-x)^2(ef+2x).$$

Quindi l' eccesso del momento della resistenza su quello della spinta di cui si parla risulterà

$$\tfrac{1}{3}e^2(ef-x)g - \tfrac{1}{6}(ef-x)^2(ef+2x),$$

cioè sarà il prodotto di $\frac{1}{6}(ef-x)$ in $2e^2g - e^2f^2 - efx + 2x^2$.

Ma siccome il primo di questi fattori, cioè $\frac{1}{6}(ef-x)$,

non può esser negativo pei valori della x dallo zero sino all' ef; ed il secondo $2e^2g - e^2f^2 - efx + 2x^2$ ha anch' esso una simile proprietà; giacchè esso è eguale a

$$2\left(\tfrac{1}{4}ef - x\right)^2 + e^2\left(2g - \tfrac{9}{8}f^2\right),$$

che è positivo per tutte le terre ordinarie; così quei valori dell' eccesso

$$\tfrac{1}{6}(ef - x)(2e^2g - e^2f^2 - efx + 2x^2),$$

che corrispondono a quelli di x dallo zero sino all' f e saranno anch' essi tutti positivi. Adunque il momento del peso di una porzione ACM qualunque dell' argine ACG sarà maggiore del momento della spinta corrispondente; e conseguentemente l' argine stesso sarà stabile rispetto al moto di rotazione: ciò che si voleva dimostrare.

La conclusione ottenuta qui sopra nella ipotesi di $\tang CAF = f$, con maggior ragione sussisterà, quando sarà $\tang CAF < f$.

In secondo luogo, se l' acqua appoggiandosi al piano CG, non può ribaltare veruna porzione dell' argine ACG analoga all' ACM intorno al punto A, neppure la pressione che l' acqua stessa esercita sulla scarpa CD potrà ribaltare una qualunque fra le porzioni dell' argine $ABCD$ analoghe alle $ABCE$.

Si tiri la EM orizzontale; si unisca la AE; si faccia $EH = \frac{1}{3}EC$; e si tiri HF verticale, e si decomponga la pressione S in due forze, cioè nella HO orizzontale e nella HV verticale.

Evidentemente, il momento per rispetto al punto A della componente O proveniente dalla pressione S, sarà eguale a quello della pressione, che sarebbe esercitata dall' acqua stessa, se fosse immediatamente

sostenuta dalla sezione CM; e però sarà esso momento minore dell' analogo del peso di ACM. Ma questo è evidentemente minore del momento di ACE e molto più di questo insieme a quello della componente V, ed anco dal peso della porzione ABC, qualora l' argine non sia a cresta; adunque il momento della spinta per la porzione $ABCE$ sarà di gran lunga minore di quello della corrispondente resistenza; ogni volta che la tangente dell' angolo CAD sia eguale o minore dell' f, come supponiamo.

In terzo ed ultimo luogo, se per l'argine $ABCD$ (fig. 15) sarà la tangente dell' angolo CAD eguale o minore di f, anco per l' argine $A'B'CD$, che ha il profilo di eguale altezza ed equiangolo allo stesso $ABCD$, sarà il momento della resistenza rispetto al punto A' e relativo a qualunque sua porzione $A'B'CE$, maggiore del momento della spinta corrispondente; vale a dire, per siffatta porzione di quest' argine, l' eccesso del momento della resistenza su quello della rispettiva spinta sarà positivo.

Si supponga unita la retta AE; e si ritenga $AD=a$, $CD=AB=A'B'=b$, l'angolo $CDA=BAD=B'A'D=m$; più pongasi $AA'=\alpha$.

L' eccesso relativo alla porzione $A'B'CE$ dell'argine $A'B'CD$ e di cui si è parlato dianzi, sarà ciò che si avrà ponendo $a+\alpha$ in luogo di a nell' ultima espressione trovata nella proposizione ventiduesima; cioè sarà

$$3bg(a+\alpha)^2-3b^2(a+\alpha)(g-1)\cos m-b^3-\left(g(a+\alpha)^2+3b(a+\alpha)\cos m\right)u$$
$$+\left(g(a+\alpha)\cos m+3(a+\alpha)\cos m+3b\right)u^2-2u^3,$$

che supera l' eccesso analogo e relativo alla porzione $ABCE$ dell' argine $ABCD$, cioè

$$3bga^2-3b^2a(g-1)\cos m-b^3-2(ga^2+3ba\cos m)u$$
$$+g(ga\cos m+3a\cos m+3b)u^2-2u^3$$

evidentemente di

$$\alpha\left\{3b(2a+\alpha)g-b(g-1)\cos m-2\Big((2a+\alpha)g+3b\cos m\Big)u+(g+3)u^2\cos m\right\}.$$

Ma siccome i valori di questa differenza corrispondenti ad $u=0$, e ad $u=b$ sono

$$3b\alpha\Big((2a+\alpha-b\cos m)g+b\cos m\Big),\ b\alpha(2a+\alpha-2b\cos m)g;$$

e però entrambi positivi; ed essa ha un solo minimo valore rispetto ad u, che corrisponde ad

$$u=\frac{(2a+\alpha)g+3b\cos m}{(g+3)\cos m},$$

e questo valore d' u è positivo e maggiore di b, come è facile a verificarsi: così anch' essa differenza sarà positiva per tutti i valori d' u dallo zero sino al b. Pertanto il suddetto eccesso relativo alla porzione $A'B'CE$ dell' argine $A'B'CD$, vale a dire

$$3b(a+\alpha)^2g-3b^2(a+\alpha)(g-1)\cos m-b^3-2\Big(g(a+\alpha)^2+3b(a+\alpha)\cos m\Big)u$$
$$+\Big(g(a+\alpha)\cos m+3(a+\alpha)\cos m+3b\Big)u^2-2u^3,$$

sarà maggiore dell' analogo eccesso relativo alla porzione $ABCE$ dell' argine $ABCD$; e quindi sarà anch' esso positivo, siccome lo è quest' ultimo. Ciò che rimaneva a dimostrarsi per soddisfare compiutamente la proposta proposizione.

Osservazione I. Quanto si è detto in quest' ultima proposizione per rispetto all' argine intero, evidentemente vale anco per una qualunque porzione $MBCE$;

8

vale a dire anco questa porzione non potrà essere ribaltata intorno al punto M del lato esteriore della sua base.

Osservazione II. Sino ad ora si sono contemplate quelle dimensioni degli argini, le quali sono necessarie per la sola stabilità, supposto sempre, come suole accadere, che le due scarpe siano egualmente inclinate coll'orizzonte, ed avendo riguardo anco alle sole rotture di rovescio; ora passeremo a considerare le dimensioni che i medesimi dovrebbero avere, avuto riguardo alla azione che l'acqua contrastata oppone alle parti dell'argine onde le medesime non cadano entro di essa.

Proposizione venticinquesima. PROBLEMA.

Determinare la massima inclinazione che può darsi alla scarpa interna di un argine colla base di esso, senza porre veruna sua porzione in pericolo di sdrucciolare o ribaltare dentro l'acqua sostenuta, supposto che questa arrivi sino al ciglio dell'argine medesimo?

Sia . . . $ABDF$ . . . (fig. 16) una parte del profilo dell'argine; BD la sua scarpa a cui si appoggia l'acqua; BE una sezione qualunque di esso argine; BH un terzo di BD; G il centro di gravità del profilo BDE; più P indichi il peso della stessa porzione BDE; ed S la spinta dell'acqua contro la scarpa BD; ed N, V, e Q, T le loro componenti perpendicolari e parallele alla sezione BE.

Incomincierò a determinare la massima fra le inclinazioni che può avere la scarpa BD colla AB,

al disotto della quale nessuna porzione analoga alla DBE sdruccioli nell' acqua; e poscia farò altrettanto avendo riguardo al solo moto di rotazione

Si ponga la verticale $BC=a$, l' angolo $CBD=m$, e l' $EBD=\omega$.

Egli è evidente che sarà

$$DE=a\frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos m\cos(m+\omega)},\ \text{e}$$

$$P=\tfrac{1}{2}a^2g\frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos m\cos(m+\omega)},$$

$$S=\tfrac{1}{2}a^2\frac{1}{\cos m};\ \text{e}$$

$Q=P\cos(m+\omega), T=S\operatorname{sen}\omega, N=P\operatorname{sen}(m+\omega), V=S\cos\omega$; e pertanto $(N+V)f+T-Q$ risulterà eguale a

$$P\Big(f\operatorname{sen}(m+\omega)-\cos(m+\omega)\Big)+S(f\cos\omega+\operatorname{sen}\omega)=$$

$$S\left\{\frac{g\operatorname{sen}\omega}{\cos(m+\omega)}\Big(f\operatorname{sen}(m+\omega)-\cos(m+\omega)\Big)+f\cos\omega+\operatorname{sen}\omega\right\};$$

ossia ad $S\cos\omega\left\{g\operatorname{tang}(\theta-m)(f\operatorname{tang}\theta-1)+f+\operatorname{tang}(\theta-m)\right\}$, posto $m+\omega=\theta$;

e ponendo

$\operatorname{tang}\theta=y$, $\operatorname{tang}m=x$, sarà $\operatorname{tang}(\theta-m)=\dfrac{y-x}{1+xy}$,

e la quantità in questione diverrà

$$S\cos\omega\left\{g\frac{y-x}{1+xy}(fy-1)+f+\frac{y-x}{1+xy}\right\}\ \text{ossia}$$

$$\frac{S\cos\omega}{1+xy}\left\{g(y-x)(fy-1)+f(1+xy)+y-x\right\},$$

vale a dire la quantità che dovrà essere positiva sarà

$$f(1+xy)+y-x-g(1-fy)(y-x)$$

ovvero $f+(g-1)x+(g-1)(1+fx)y+fy^2$

per tutti i valori d'y, da y eguale ad x sino ad y eguale alla tangente di un retto. Ma questo fattore risulta positivo, sì ponendovi $y=o$, che ponendovi $y=x$; per cui que' due valori di y che il rendono nullo o sono entrambi maggiori di x, ovvero entrambi compresi fra o ed x, ovvero sono entrambi immaginarj. Ora esso fattore potrà rendersi negativo per un valor d'y compreso fra x e l'infinito solamente nel primo di questi casi. Facendo pertanto $y=x+y'$ nel detto fattore, converrà a tal fine che il risultamento in y', che si otterrà, abbia le radici reali e positive; la somma delle quali condizioni dà che la x non sia compresa fra i due limiti.

$$\frac{g+1-2\sqrt{g(1+f^2)}}{f(g-1)}, \quad \frac{g+1+2\sqrt{g(1+f^2)}}{f(g-1)},$$

e l'altra dà che la medesima x sia minore di $\frac{g-1}{f(g+1)}$.

Ora con una breve considerazione si riconosce che questa terza quantità è intermedia fra le due prime. Laonde le due condizioni non potranno essere simultaneamente soddisfatte se non nel caso che si abbia

$$x<\frac{g+1-2\sqrt{g(1+f^2)}}{f(g-1)}.$$

In questo solo caso adunque potrà il fattore suddetto essere negativo per valori di y compresi fra x e l'infinito; negli altri casi esso sarà sempre positivo. Adunque lo sdrucciolamento della terra sopra menzionato potrà solo avvenire, quando il valore di x ossia della tangente dell'angolo che la scarpa dell'argine fa colla BC sia minore di

$$\frac{g+1-2\sqrt{g(1+f^2)}}{f(g-1)}.$$

ossia della equivalente

$$\frac{(g-1+2f\sqrt{g})(g-1-2f\sqrt{g})}{f(g-1)\left(g+1+2\sqrt{g(1+f^2)}\right)}$$

quantità positiva secondo che lo è il fattore $g-1-2f\sqrt{g}$, ossia secondo che lo è la $\frac{1}{2}(\sqrt{g}-\frac{1}{\sqrt{g}})-f$; e però negativa ogniqualvolta si abbia $g<2$, ed $f>\frac{1}{4}\sqrt{2}$ ossia di $0,3536$, nel qual caso sono evidentemente comprese tutte le terre ordinarie.

Passo ora a determinare la massima fra le inclinazioni che possa avere la scarpa interna, senza che nessuna porzione d' argine simile alla BDE (fig. 17) possa essere ribaltata nell' acqua sostenuta.

Senza il soccorso del calcolo facilmente si comprende, che, la scarpa qui dimandata, dovrà cadere anch' essa a destra della verticale BC; ed inoltre che la sezione della più facil rottura è la stessa BC; e però la presente quistione si riduce a determinare quella scarpa analoga alla BD, che fa colla BC il massimo angolo, senza che la porzione CBD sia in pericolo di ribaltare nell' acqua col rotare intorno al punto B.

Essendo il peso della porzione BCD eguale ad $\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot g$, e la perpendicolare tirata dal suo centro di gravità alla BC eguale ad $\frac{1}{3}CD$, il momento col quale la stessa porzione tenderà a rotare intorno al punto B sarà

$$\frac{1}{6}BC\cdot\overline{CD}^2\cdot g.$$

Così per essere la pressione esercitata dall' acqua sulla scarpa BD espressa da $\frac{1}{2} BC \cdot BD$, ed applicata perpendicolarmente alla BD ad una distanza dal punto B eguale ad $\frac{1}{3} BD$, il momento col quale l' acqua sostiene la porzione BCD sarà

$$\frac{1}{6} BC \cdot \overline{BD}^2.$$

Quindi affinchè la porzione BCD non ribalti nell' acqua col rotare intorno al punto B, dovrà essere $\frac{1}{6} BC \cdot \overline{BD}^2$ maggiore od almeno eguale ad $\frac{1}{6} BC \cdot \overline{CD}^2 \cdot g$;

ossia dovrà essere $\overline{BD}^2$ non minore di $g \cdot \overline{CD}^2$; e però, per la scarpa più inclinata alla verticale BC sarà

$$\overline{BD}^2 = g \cdot \overline{CD}^2, \text{ ossia } a^2 + \overline{CD}^2 = g \cdot \overline{CD}^2;$$

oppure $a^2 = (g - 1) a^2 \operatorname{tang}^2 CBD$: equazione che somministra $\operatorname{tang} CBD = \frac{1}{\sqrt{(g-1)}}$. Vale a dire, acciocchè la porzione BCD non ribalti nell' acqua sostenuta dall' argine col rotare intorno B dovrà essere la tangente dell' angolo CBD non maggiore di $\frac{1}{\sqrt{(g-1)}}$.

Concludasi pertanto, che la inclinazione richiesta nella proposizione sarà quella, che farà colla BC l' angolo avente per tangente la minore delle due quantità

$$\frac{2\sqrt{g(1+f^2)} - g - 1}{f(g-1)}, \quad \frac{1}{\sqrt{(g-1)}}:$$

generalmente sarà quella, che farà colla BC l'angolo

avente per tangente $\frac{1}{\sqrt{(g-1)}}$, risultando questa quantità per l'ordinario minore dell' altra.

Esempio. Sia $f=\frac{3}{4}$, e $g=\frac{3}{2}$; e si avrà

$$\frac{2\sqrt{g(1+f^2)}-g-1}{f(g-1)}=\frac{10}{3}(\sqrt{6}-2)=1{,}498 \text{ pros-}$$

simamente: tangente, la quale corrisponde ad un angolo (fig. 15) $MBC=56°,16'$.

Così si ha $\frac{1}{\sqrt{(g-1)}}=\sqrt{2}$; per cui quest' altra quantità, come tangente, corrisponderà ad un angolo $NBC=54°,44'$; e pertanto la scarpa dimandata per questo caso farà colla BC un angolo di circa cinquantaquattro gradi e quarantaquattro minuti primi: in questo caso, essendo tang $CBD=\sqrt{2}$, si impara (fig. 16), che la base CD della scarpa eguaglia la diagonale del quadrato avente per lato l' altezza BC.

Corollario I. Il valore d' y corrispondente alla

$$x=\frac{g+1-2\sqrt{g(1+f^2)}}{f(g-1)} \text{ determinata superior-}$$

mente, avendo riguardo al solo moto di traslazione, risulta

$$\frac{1}{f}-\sqrt{\frac{1}{g}\left(1+\frac{1}{f^2}\right)};$$

e questo esprimerà la tangente dell' angolo, che fa la stessa verticale BC (fig. 1) colla retta BI, che separa dal rimanente dell' argine quella porzione analoga alla BDE, la quale si trova appena in equilibrio.

Corollario. I risultamenti avuti nell' esempio qui esposto ci istruiscono, che, allorchè una scarpa interna di un argine, o una sponda di fiume, la quale sia corrosa dalle acque presso il fondo, prima di essere ridotta al punto, che una sua porzione sdruccioli nell' acqua, ha essa oltrepassato lo stato sufficiente per cadervi di ribalto; e questo è il motivo per cui le parti degli argini che sostengono le acque, o delle sponde dei fiumi, cadono per l' ordinario entro di essa col ribaltare intorno la parte inferiore delle rispettive basi, anzichè sdrucciolarvi: all' opposto di ciò che deve accadere nelle rotture di rovescio degli argini, come più sotto si vedrà.

La porzione poi che potrà essere la prima a cadere nell' acqua sarà BC; cioè la sezione della rottura sarà BC, che trovasi a piombo: che se ciò per altre circostanze non potrà aver luogo, la sezione della rottura, quando accada per via di moto di rotazione, potrà indifferentemente succedere tanto secondo la Bm (fig. 16) quanto secondo la Bn facenti angoli eguali colla verticale stessa BC; e qualora la rottura possa accadere a seconda di varie rette analoghe o alla Bm, ovvero alla Bn, essa accadrà propriamente a seconda di quella fra queste rette medesime, che sarà meno inclinata alla verticale stessa BC.

Le cose qui esposte, le quali si accordano con ciò che si osserva comunemente in pratica, ci avvertono anco, che se l' argine sarà appena in equilibrio, quando l' acqua sia stagnante, esso rovinerà se la medesima si farà corrente; perchè con ciò non solo cesserà in parte la pressione necessaria per so-

stenere le sue parti, ma anco avranno luogo naturalmente alcuni urti contro le parti dell' argine, i quali favoriranno la sua caduta nell' acqua medesima.

Osservazione I. Supposto che la scarpa interna di un argine o sponda di un fiume, formata di terra sconnessa, sporga sopra l' acqua trattenuta, la quale arrivi fino al livello del piano dell' argine, o della campagna se trattisi di sponda, con poche modificazioni ed aggiunte alle cose esposte si può determinare se una porzione ABC (fig. 18) segata da qualunque piano passante per un dato punto A sia o no stabile.

Cercheremo primieramente se v' abbia stabilità riguardo al moto di traslazione. Conducasi da A la AD verticale, e si estenda sino alla orizzontale BC; e dal medesimo punto A si tiri anco la AE, la quale si avanzi verso l' acqua e colle ED, DA comprenda un triangolo equivalente all' area mistilinea DCA. Tirata per A un' altra retta qualunque AB; le forze che avranno parte allo sdrucciolamento della massa ABC lunga la retta BA saranno: il peso della massa terrea BCA, meno il peso di una massa acquea eguale in volume a DAC, i quali agiscono verticalmente; ed il peso d' un prismo d'acqua che abbia per area della base $\frac{AD \cdot AD}{2}$, il quale agisce orizzontalmente. Decomposte ciascuna di queste azioni in due, l' una parallela e l' altra perpendicolare alla BA, e moltiplicate le componenti perpendicolari alla AB pel coefficiente f, si verrà a conoscere la tendenza a sdrucciolare o a fermarsi sulla AB della massa ABC.

Sostituiscasi ora la massa avente il profilo rettilineo *BEA* all'equivalente avente il profilo mistilineo *BCA*; le forze che avranno parte allo sdrucciolamento della prima di queste e lungo la stessa retta *B A* saranno: nel verso verticale il peso della massa terrea *B E A*, meno il peso di una massa acquea equivalente al prisma avente per base *D E A*; e nel verso orizzontale il peso d' una massa acquea prismatica avente per area della base $\frac{DA \cdot DA}{2}$. Da queste forze ricaverebbesi similmente come si è testè detto per l'altra massa, la tendenza a fermarsi o a sdrucciolare dell' attuale massa *B E A* sulla sezione *B A*.

Ma queste due ultime forze sono rispettivamente eguali alle due considerate precedentemente nella massa *B C A*. Dunque anco le tendenze a sdrucciolare o a fermarsi sulla *B A* delle due masse *B C A*, *BEA* sono affatto a circostanze similissime. E però la massa mistilinea *B C A*, riguardo allo sdrucciolamento, comportasi allo stessissimo modo della massa rettilinea equivalente *B E A*. Quindi quando le circostanze sono tali, che lungo una qualche sezione *B A* possa sdrucciolare la massa *B E A*, il potrà pure anco la massa *B C A*. Da ciò si conclude che la sponda o l' argine sporgente di cui si tratta sarà stabile o no riguardo allo sdrucciolamento, esteriormente al dato punto *A*, a norma che la quantità

$$-x = \frac{DE}{DA} = \frac{\frac{1}{2} DE \cdot DA}{\frac{1}{2} \overline{DA}^2} = \frac{DEA}{\frac{1}{2} \overline{DA}^2} = \frac{DCA}{\frac{1}{2} \overline{DA}^2}$$

sarà minore o maggiore di

$$\frac{2\sqrt{g(1+f^2)} - 1 - g}{f(g-1)}$$

ossia secondo che l' area $DCA = DEA$ sarà minore o maggiore del prodotto

$$\tfrac{1}{2}\overline{AD}^2\left(\frac{2\sqrt{g(1+f^2)}-1-g}{f(g-1)}\right).$$

Facendo $g=1,5$ ed $f=0,75$, saravvi o no una tale stabilità secondo che la DE, base del triangolo d' altezza DA a cui riducesi l' area DCA, riesce minore o maggiore di $\frac{3}{2}DA$.

Passiamo a considerare il ribaltamento, o rovesciamento. A questo effetto hanno parte due forze; primo il peso relativo della massa terrea DCA immersa nell' acqua, il quale si impiega per rovesciamento con un braccio di leva uguale alla distanza dal centro di gravità dell' area DCA dalla linea DA, distanza che chiameremo d; secondo la pressione orizzontale dell' acqua sulla superficie curva CA, che è eguale ad $\frac{1}{2}DA \cdot DA$ e tende ad impedire il rovesciamento con un braccio di leva eguale ad $\frac{1}{3}DA$. Per tanto avremo o no stabilità in quanto al rovesciamento, esteriormente al punto A, secondo che la quantità

$$\tfrac{1}{6}\overline{DA}^3-(g-1)\,DAC\cdot d$$

sarà positiva o negativa.

Se DCA è un rettangolo di base b, avremo o no stabilità secondo che sarà o no positiva la quantità $\frac{1}{6}\overline{DA}^3-(g-1)DA\cdot b\cdot\frac{b}{2}$, ossia la $DA-b\sqrt{3(g-1)}$.

Perciò ogni qualvolta sia $b<\frac{2}{3}DA$, vi sarà sicurezza per tutte quelle qualità di terra dove g non è maggiore di 1,75, ed ogni qualvolta sia $b>\frac{2}{3}DA$,

vi sarà rovina, prescindendo già dalla tenacità, per tutte le terre più gravi di $1 \frac{3}{16}$ ossia di 1 1875.

Osservazione II. Due pezzi di sponda o d'argine formati con simili qualità di terra, superiormente orizzontali, sporgenti sopra l'acqua, la quale vi arrivi fino al ciglio, e i quali esteriormente a due punti presi nelle scarpe interne uno per ciascuna abbiano simili profili, saranno eziandio in un simile stato di stabilità, esteriormente a tali punti.

Siano acb, ACB (fig. 18, 19) i due pezzi, A, a i due punti esteriormente ai quali vogliasi considerare le stabilità. E sia $n:N$ il rapporto delle dimensioni omologhe, cioè $ac:AC = n:N$.

Cominciando dallo sdrucciolamento, conducansi dai punti A, a due rette AB, ab similmente inclinate all'orizzonte e dirigentisi o entrambe verso l'acqua o entrambe in parte contraria. Paragonando fra loro le forze corrispondenti che hanno parte allo sdrucciolamento dei due pezzi, avremo: il peso della massa abc al peso della $ABC = n^2 : N^2$; il peso d'un volume d'acqua dac, supposto condotta la verticale ad, al peso di un volume d'acqua eguale a $DAC = n^2 : N^2$. Così la pressione orizzontale sopra ac alla pressione orizzontale sopra $AC = n^2 : N^2$. Adunque tutte le forze che hanno parte allo sdrucciolamento di abc stanno alle corrispondenti che si impiegano allo sdrucciolamento di ABC nel medesimo rapporto di $n^2 : N^2$. Quindi, come è facile a comprendersi, il complesso di tutte le azioni delle forze da cui dipende in certo modo la tendenza a sdrucciolare o a fermarsi del pezzo bac sulla ab starà all'analogo complesso relativo al pezzo BAC

sulla *AB* come il quadrato della *n* a qnello della *N*. Dal che discende facilissimamente quello che si voleva dimostrare.

Ciò poi è ancor più facile a vedersi riguardo al rovesciamento o ribaltamento; perchè i momenti dei pezzi relativi delle masse terree *dca*, *DCA* immerse nell' acqua, per rottare rispettivamente intorno ai punti *a*, *A* sono fra loro $= n^3 : N^3$ ossia come $\overline{ad}^3 : \overline{AD}^3$, secondo la quale ragione sono anco i momenti delle pressioni orizzontali dell' acqua sulle superficie *dc*, *DC*. Adunque ecc.

Osservazione III. Alzandosi od abbassandosi l' acqua di un fiume o di un canale, la stabilità delle sponde e degli argini sporgenti si cangia: e specialmente in quanto al rovesciamento, questo si fa più facile, quanto più l' altezza dell' acqua diminuisce, crescendo con ciò il momento verticale che tende al rovesciamento; poichè la terra, che avanza al di sopra del livello dell' acqua, gravita non più con peso relativo, ma con peso assoluto; laddove diminuisce il momento orizzontale che si oppone al rovesciamento medesimo. E se sopra una medesima acqua corrente sporgono due sponde di grandezze diverse ma di simili profili, di cui il livello dell' acqua arrivi sino a' punti omologhi, all'abbassarsi l' acqua di questa corrente, precipiterà più presto la sponda piccola dell' altra; giacchè relativamente alla sua grandezza l' acqua si abbassarebbe più per quella che per questa. Si prescinde però in ciò dalla tenacità.

Osservazione IV. Tutte le cose che si trattano in questa parte, suppongono, che le acque non penitrino o penitrino poco per entro all'argine, fermandosi solamente alla superficie esterna. Che se avverrà penetramento d'acqua, questo indebolirà l'argine: come si debbono modificare le forme da darsi agli argini per allontanare il pericolo che potrebbe sovrastare anco per questa cagione non è difficile a vedersi. Così un' altra cosa importante e che ha molta relazione con quelle medesime trattate in questa parte sarebbe un cenno della maniera colla quale l'acqua può rovinare un argine corrodendolo, come essa fa a smovere e portarne via a poco a poco le parti; ma di ciò se ne tratterà in altra occasione, insieme ad altri fenomini che dipendono in gran parte dalla tenacità delle terre.

Proposizione ventiseiesima. Problema.

Scoprire, se si può levare una porzione analoga alla CDD' (Fig. 20) dalla parte interna dell' argine ACD determinato nella proposizione diciannovesima, senza porre l'argine stesso in pericolo di rottura di nessuna maniera?

La rottura di quest' argine può avvenire nei cinque modi seguenti: sdrucciolando una porzione analoga alla AEC giù della sua base EA, o rotando questa medesima porzione intorno al punto A; ovvero sdrucciolando una porzione analoga alla $CD'e$ in su per la sua base $D'e$, o pure sdrucciolando essa in giù della medesima base eD', ovvero ribaltando una porzione somigliante a quest' ultima nell' acqua col

rotare intorno al punto D'. Contemplerò queste diverse rotture successivamente l'una dopo l'altra; ed incomincierò colla prima.

Conducansi le GP, GN, GQ, HS, VH, TH ed EF come nella figura sesta, e la CR verticale; e pongasi l'angolo $CD'R = m$, e la retta $AR = e$; e si ritengano tutte le altre denominazioni usate nella proposizione diciannovesima dianzi citata.

Essendo tang $CAR = f$, si avrà $CR = ef$, $RD' = ef \cot m$, $AD' = e(1 + f \cot m)$,

$$ED' = AD' \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen}(m+\omega)}, \text{ ed } EF = AD' \frac{\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen} m}{\operatorname{sen}(m+\omega)};$$

e però

$$P = \tfrac{1}{2} e^2 g (1 + f \cot m) \left(\frac{f}{\operatorname{sen} m} - \frac{(1 + f \cot m) \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen}(m+\omega)} \right) \operatorname{sen} m;$$

$$\text{ossia } P = \tfrac{1}{2} e^2 \left(\frac{\operatorname{sen} m + f \cos m}{\operatorname{sen} m} \right) g R, \text{ posto}$$

$$\frac{f}{\operatorname{sen} m} - \frac{(1 + f \cos m) \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen}(m+\omega)}, \text{ ovvero } \frac{f \cos \omega - \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen}(m+\omega)} = R;$$

e pertanto sarà

$$N = \tfrac{1}{2} e^2 \left(\frac{\operatorname{sen} m + f \cos m}{\operatorname{sen} m} \right) g R \cos \omega,$$

$$\text{e } Q = \tfrac{1}{2} e^2 \left(\frac{\operatorname{sen} m + f \cos m}{\operatorname{sen} m} \right) g R \operatorname{sen} \omega.$$

Così si avrà

$$S = \tfrac{1}{2} \overline{CE}^2 \operatorname{sen} m = \tfrac{1}{2} e^2 R^2 \operatorname{sen} m; \text{ e però}$$

$$V = \tfrac{1}{2} e^2 R^2 \operatorname{sen} m \cos(m + \omega),$$

$$\text{e } T = \tfrac{1}{2} e^2 R^2 \operatorname{sen} m \operatorname{sen}(m + \omega).$$

Sostituendo questi valori delle N, Q, V, e T nella quantità $fN - Q + fV - T$ da cui dipende lo stato della porzione ACE rispetto al moto di traslazione di cui si tratta, si ha

$$\tfrac{1}{2} e^2 R \Big\{ g(\operatorname{sen} m + f\cos m)(f\cos\omega - \operatorname{sen}\omega)$$

$$+ \frac{f\cos\omega - \operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(m+\omega)} \Big(f\cos(m+\omega) - \operatorname{sen}(m+\omega) \Big) \operatorname{sen} m \Big\}.$$

Quest' ultima quantità facilmente si riduce alla

$$\tfrac{1}{2} e^2 R^2 \operatorname{sen}(m+\omega) \operatorname{sen} m \left(g\left(1 + \frac{f}{x}\right) + f\frac{1 - xy}{x+y} - 1 \right),$$

dove $x = \text{tang}.\, m$, ed $y = \text{tang}.\, \omega$, la quale equivale a quest' altra

$$\tfrac{1}{2} e^2 R^2 \operatorname{sen}(m+\omega) \operatorname{sen} m \left(g\frac{x+f}{x} + f\frac{1+x^2}{x+y} - fx - 1 \right).$$

Quindi, affinchè non abbia luogo il moto di traslazione qui contemplato, sarà sufficiente che sia positiva l' espressione

$$g\frac{x+f}{x} + f\frac{1+x^2}{x+y} - fx - 1,$$

il cui massimo valore corrisponde evidentemente al minimo della y, ed il minimo di essa reciprocamente al massimo della y medesima, cioè ad $y = f$; e però il valore richiesto della x sarà il massimo fra quelli, che rendono positiva la

$$g\frac{x+f}{x} + f\frac{1+x^2}{x+f} - fx - 1,$$

ossia $\dfrac{1}{x(x+f)}\Big(g(x+f)^2 - x^2(1+f^2) \Big)$,

il quale è evidentemente

$$\frac{f\sqrt{g}}{\sqrt{(1+f^2)} - \sqrt{g}}.$$

Vale a dire, perchè la porzione ACE non isdrucccioli in giù della sua base EA, non dovrà essere la tangente dell' angolo $CD'A$ maggiore di

$$\frac{f\sqrt{g}}{\sqrt{(1+f^2)}-\sqrt{g}};$$

e conseguentemente la maggiore inclinazione della scarpa CD' coll' orizzonte avrà per tangente l' espressione qui esposta.

Questo valore è maggiore di f. Di fatto, essendo $\sqrt{1+f^2}<1+f$, e $\sqrt{g}>1$, sarà $\sqrt{1+f^2}-\sqrt{g}<f$, e molto più di $\sqrt{g}$; e per conseguenza $\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{(1+f^2)}-\sqrt{g}}>1$. Quindi sarà $\frac{f\sqrt{g}}{\sqrt{(1+f^2)}-\sqrt{g}}>f$.

La medesima tangente $f\sqrt{g}:\left\{\sqrt{1+f^2}-\sqrt{g}\right\}$ sarà positiva, infinita, o negativa, secondo che sarà $\sqrt{1+f^2}$ maggiore, uguale, o minore di $\sqrt{g}$; e però l' angolo m corrispondente sarà minore, od eguale, o maggiore di un retto; ed in tutti i casi, almeno per le terre ordinarie, sarà esso poco differente da quest' ultimo.

Esempio. Per $f=0,75$ e $g=1,438$ si ha $\frac{f\sqrt{g}}{\sqrt{(1+f^2)}-\sqrt{g}}=\frac{717}{44}$; e però l' angolo m, il quale deve avere per tangente $\frac{717}{44}$ sarà maggiore di $86°$, $29'$ e minore di $86°\ 30'$; e per tanto la base RD' risulterà circa di un sedicesimo della altezza CR. Così pel caso di $f=\frac{3}{4}$, e $g=\frac{3}{2}$ si trova l' angolo stesso $m=88°\ 26'$ prossimamente.

Per la prima di queste medesime specie di terra si ha $AD' : CR = 67 : 48$; cioè la base alla altezza prossimamente come sette a cinque.

Essendo risultata AD' maggiore della AR, ossia la retta CD' cadendo a destra dalla verticale CR, pel caso di $g = \frac{3}{2}$, ed $f = \frac{3}{4}$, la porzione ACE non potrà essere ribaltata intorno al punto A, per quello che si è osservato nella prima parte della proposizione ventiquattresima.

Chi desidera scoprire la maggiore inclinazione della scarpa Cd, perchè nessuna porzione analoga alla ACE' ribalti intorno al punto A, ecco come lo potrà fare.

Si nomini x la tangente dell'angolo dCR, ed y la distanza che ha il punto E' dalla orizzontale che passa per C. Con facilità si trova che la porzione ACE' non sarà rovesciata intorno ad A, purchè non sia negativa la quantità

$$y \left\{ (1+x^2)y^2 - e(3f+3x+gx+2fgx^2)y + 2g(1-fx)e^2 \right\},$$

ossia il suo fattore

$$(1+x^2)y^2 - e(3f+3x+gx+2fgx^2)y + 2ge^2(1-fx).$$

Questo fattore ha rispetto alla y un minimo valore che è

$$\frac{16g(1+x^2)(1-fx) - (3f+3x+gx+2fgx)^2}{1+x^2} \cdot \frac{e^2}{8},$$

il quale corrisponde ad $y = \frac{e}{4} \cdot \frac{3f+3x+gx+2fgx}{1+x^2}$.

Eguaglisi a zero il minimo valore qui esposto, e si avrà l' equazione

$$16g(1+x^2)(1-fx) - (3f+3x+gx+2fgx)^2 = 0,$$

ossia $16g-9f^2-2f(9+11g)x-(9-10g+g^2+12gf^2)x^2$
$$-4fg(7+g)x^3-4f^2g^2x^4=0,$$
la quale in generale avrà una sola radice positiva. Si nomini $\dot{x}$ questa radice, o la minore delle radici positive della stessa equazione; e si ponga questa medesima nell'espressione dell' y, e si otterrà

$$\frac{e}{4}\cdot\frac{3f+3\dot{x}+g\dot{x}+2fg\dot{x}}{1+\dot{x}^2}.$$

Fatto ciò si osservi, se $\dot{x}$ è minore, o eguale, o maggiore di quest'ultima quantità, e nei primi due casi, la stessa $\dot{x}$ indicherà la tangente della massima inclinazione che potrà avere la CD colla CR verticale; e nel terzo caso, lo stesso valore cercato sarà il più picciolo valore positivo della x data dall' equazione

$$(2g-1)f^2x^2+(3+g)fx+2f^2-2g=0.$$

Le ragioni di queste dichiarazioni insieme a varie riflessioni relative alle medesime, per non allongarmi di troppo, le lascio al lettore.

Passo ora a considerare quelle cause dalle quali può trarre origine il moto di traslazione della porzione $CD'e$ giù del piano eD', ed a far vedere che esso non può aver luogo; indi farò altrettanto per il moto che la stessa porzione d' argine potrebbe concepire dal basso in alto sulla stessa sua base $D'e$.

Ritengasi l' angolo $CD'A=\alpha$, e la $AR=e$ (fig. 21) ; più pongasi $90°-CD'R=m$, $90°-eD'R=\omega$. Evidentemente l' angolo $CD'R$ dev'essere acuto; e però affinchè la porzione $eD'C$ non isdruccioli nell' acqua dovrà essere negativa la quantità

$$\tfrac{1}{2}e^2f^2\left\{\frac{\operatorname{sen}(\alpha+m-\omega)}{\cos m\cos\alpha}-\frac{\cos(m+\alpha)\operatorname{sen}(m-\omega)}{\cos^2 m\cos\alpha}g\right\},$$

ossia

$$\tfrac{1}{2}e^2f^2\cos\omega\left\{f(1+\operatorname{tang}m\operatorname{tang}\omega)+\operatorname{tang}m-\operatorname{tang}\omega\right.$$
$$\left.-(1-f\operatorname{tang}m)(\operatorname{tang}m-\operatorname{tang}\omega)g\right\}$$

per tutti i valori di ω da zero sino ad m. Ma quest' ultima quantità non è negativa, purchè tale non sia il suo fattore compreso fra le parentesi grandi, cioè

$$f+\operatorname{tang}m-g\operatorname{tang}m+fg\operatorname{tang}^2m$$
$$+\left(g-1+(1-fg)f\operatorname{tang}m\right)\operatorname{tang}\omega,$$

il quale per le terre comuni è positivo per tutti i detti valori d'ω, qualunque sia la m; adunque, quando le terre componenti l'argine siano delle comuni, qualunque sia la inclinazione in quistione, non vi sarà pericolo dello sdrucciolamento di cui si tratta.

In quarto luogo passo a trovare la maggiore inclinazione che può avere la scarpa CD' colla base dell' argine, perchè nessuna porzione analoga alla $CD'e$ sdruccioli sulla sua base $D'e$ verso la campagna esterna.

Si tenga, come sopra, $AR=e$, $CD'A=m$, e $DA=\omega$; e si troverà la resistenza della porzione stessa e $D'C$ eguale ad

$$\tfrac{1}{2}e^2f^2\frac{\operatorname{sen}(\alpha+m)\operatorname{sen}(m-\omega)}{\cos\alpha\operatorname{sen}^2 m},$$

e la spinta dell' acqua espressa dalla

$$\tfrac{1}{2}e^2f^2\frac{\operatorname{sen}(m-\alpha-\omega)}{\cos\alpha\operatorname{sen}m};$$

e però affinchè la porzione di cui si tratta non isdrucciolì verso la campagna esterna dovranno essere per tutti i valori d'ω dallo zero all' m positivi i corrispondenti valori della quantità

$$\frac{1}{2}e^2f^2\left\{\frac{\text{sen}(\alpha+m)\,\text{sen}(m-\omega)}{\cos\alpha\,\text{sen}^2 m}g+\frac{\text{sen}(\alpha+\omega-m)}{\cos\alpha\,\text{sen}\,m}\right\},$$

la quale equivale alla seguente

$$\frac{1}{2}e^2f^2\left\{g-1+ft+fgt+(f+t-gt-fgt^2)\,\text{tang}\,\omega\right\}\cos\omega,$$

dove $t=\cot m$.

Pel caso di ω minore di un retto quest' ultima quantità risulta positiva, quando sia positivo il suo fattore

$$g-1+ft+fgt+(f+t-gt-fgt^2)\,\text{tang}\,\omega,$$

il quale lo è sempre, giacchè tali sono i suoi valori corrispondenti ad $\omega=0$, e ad $\omega=\frac{1}{t}$. I suddetti valori della medesima quantità da cui dipende la stabilità in quistione sono tutti positivi anco nel caso di m eguale ad un retto, poichè essa in questo caso si riduce alla $\frac{1}{2}e^2f^2(g-1+f\,\text{tang}\,\omega)\cos\omega$.

Rimane ora a considerarsi il caso d'm maggiore di un retto. Si nomini n la tangente dell' angolo che insieme ad un retto forma l' angolo m; e l' espressione a considerarsi si ridurrà a quest' altra

$$\frac{1}{2}e^2f^2\left\{g-1-fn-fgn+(f+gn-n-fgn^2)\,\text{tang}\,\omega\right\}\cos\omega,$$

la quale è positiva per tutti i valori dell' ω dallo zero fino all' n, purchè n non sia maggiore di $\frac{g-1}{f(g+1)}$.

Si concluda pertanto, che la maggiore inclinazione

qui cercata è quella che ha per tangente $\frac{1-g}{f(1+g)}$: quantità in generale negativa.

In quinto ed ultimo luogo dimostreremo che nessuna porzione dell' argine attuale è in pericolo di essere ribaltata nell' acqua rotando intorno al punto D' (fig. 22).

Si tirino le orizzontali eP, Nh, la prima dal punto e ove finisce la $D'e$ sezione qualsivoglia, e la seconda dal punto N di mezzo della eC; e si ponga $CP = x$, tang $D'CR = t$.

È facile a trovarsi che la porzione $eD'C$ tende a rotare intorno del punto D' con un momento eguale ad

$$\tfrac{1}{6} \cdot \frac{e}{f}(1-fm)\,x\,(2ef^2 m - x)\,g;$$

e che il momento della pressione dell' acqua col quale essa si oppone alla caduta della parte stessa $eD'C$ è eguale ad $\frac{1}{6}e^2 f^3(1+m^2)$; e però affinchè la porzione medesima non roti intorno al punto D' dovrà essere positiva la quantità

$$\frac{e}{6f}\left\{f^4(1+m^2)e^2 - 2egf^2 m(1-fm)\,x + (1-fm)\,g x^2\right\}$$

per tutti i valori della x dallo zero sino all' ef, e della m dallo zero ad $\frac{1}{f}$.

Quest' ultima quantità ha evidentemente per minimo valore rispetto ad x

$$\tfrac{1}{6}e^2 f^3\Big(1 + m^2 - g m^2 (1-fm)\Big)$$

ossia $$\tfrac{1}{6}e^2 f^3\Big(1 + (1-g)\,m^2 + fgm^3\Big),$$

il quale corrisponde ad $x = ef^2 m$.

Ma la quantità $\frac{1}{6}e^2 f^3 \left(1+(1-g)m^2+fgm^3\right)$ è positiva per tutti i valori reali positivi della m; adunque qualunque sia la inclinazione della scarpa CD' coll' orizzonte nessuna porzione analoga alla $CD'e$ potrà ribaltare nell' acqua col rotare intorno al punto D'.

Si concluda, per tutto il sopra esposto, in adempimento della proposta proposizione, che all' occorrenza si potrà levare dall' argine di cui si tratta una porzione analoga alla CDD' (fig. 20), sempre che la scarpa CD' rimasta, non faccia colla base di esso un angolo maggiore del minore dei tre determinati nelle parti, prima, seconda, e quarta in cui si è divisa la poposizione. In generale però sarà sufficiente che esso non sia maggiore di quello che ha per tangente

$$\frac{f\sqrt{g}}{\sqrt{(1+f^2)}-\sqrt{g}}:$$

risultamento che può essere utile per molte occasioni.

Osservazione. Siccome le cose dette qui sopra per l' argine intero valgono anco per una sua porzione superiore a qualunque sua sezione orizzontale, così l' argine qui sopra determinato sarà assolutamente stabile. Ma ciò che si è dimostrato per un argine a cresta molto più vale per un argine che abbia il piano e le scarpe inclinate all' orizzonte come sono quelle del medesimo contemplato; adunque *un argine formato di terra sarà naturalmente stabile:* risultamento anch' esso utilissimo.

Proposizione ventisettesima. PROBLEMA.

Determinare la massima porzione, analoga alla CFD, che si può levare dall' argine $ABCD$ (fig. 23), di cui si è parlato nella proposizione diciottesima, senza mettere l' argine stesso in pericolo di rottura?

La rottura di quest' argine anch' essa potrebbe avvenire in cinque maniere differenti, come per l' argine considerato nella precedente proposizione: io incomincerò a dimostrare, che da esso si può levare la porzione CDR, senza punto metterlo in pericolo di rottura; e poscia passerò ad espore la soluzione della proposta proposizione.

Levando la porzione CRD, ed appoggiandosi l' acqua alla CR, nessuna porzione dell' argine rimanente $ABCR$ sarà in pericolo di essere spinta in su per la sua base verso la campagna esterna, nè di cadere nell'acqua, sia collo sdrucciolare sulla medesima sua base o col ribaltare intorno al punto R, ciò risulta dalle due proposizioni precedenti: come pure nessuna porzione analoga alla $ABCE'$ potrà moversi col ribaltare intorno al punto A, e ciò per quello che si è veduto nella terza parte della proposizione ventiquattresima; per tanto, rimane solo a dimostrarsi che la stessa porzione $ABCE'$ non potrà neppure sdrucciolare sulla rispettiva base $E'A$.

Si denomini p la larghezza del piano, cioè la BC; e si ritengano le altre denominazioni usate nella stessa proposizione diciottesima; e si otterrà $CR = 3p$, $AR = 4p$, $Rk' = 4p \tang \omega$,

l'area di $ABCE' = \frac{1}{2} p^2 (15 - 16 \tang \omega)$,
$P = \frac{1}{2} p^2 (15 - 16 \tang \omega) g$, ed $S = \frac{1}{2} p^2 (3 - 4 \tang \omega)^2$;
e però la resistenza che incontrerà la porzione $ABCE'$ a sdrucciolare sulla sua base, sarà eguale ad

$$\frac{1}{2} g p^2 (15 - 16 y) \frac{f - y}{\sqrt{(1 + y^2)}} - \frac{1}{2} p^2 (3 - 4y)^2 \frac{1 + fy}{\sqrt{(1 + y^2)}} :$$

ove l'y è posto per $\tang \omega$.

Quest' ultima quantità essendo eguale ad

$$\frac{1}{2} \frac{p^2}{\sqrt{(1 + y^2)}} \left\{ g (15 - 16 y)(f - y) - (3 - 4y)^2 (1 + fy) \right\};$$

e però ad

$$\frac{1}{8} p^2 \frac{3 - 4y}{\sqrt{(1 + y^2)}} \left(12 y^2 + (7 - 16 g) y + 15 g - 12 \right),$$

ove si è posto per f il suo valore $\frac{3}{4}$, la porzione $ABCE'$ nòn isdrucciolerà in basso della sua base $E'A$, se sarà positiva od almeno nulla la quantità

$$12 y^2 + (7 - 16 g) y + 15 g - 12.$$

Ma questa quantità è positiva per tutti i valori d'y, purchè sia positiva la

$$944 g - 625 - 256 g^2;$$

e quest' ultima è tale per tutte le terre ordinarie. Adunque ecc.

Passo ora a determinare la maggior porzione CFD, che si può levare dall' argine in quistione, senza che nessuna porzione della rimanente $ABCF$, analoga alla $ABCE$, si trovi in pericolo di sdrucciolare sulla sua base EA in basso.

Ritengo le denominazioni già usate qui sopra, più denomino m l' angolo FCR.

Dalla ispezione della figura si ha la retta $FR = 3p \tang m$, la $AF = p(4 - 3 \tang m)$,

l'area di $RCF = \frac{3}{2}p \cdot 3p \tang m = \frac{9}{2}p^2 \tang m$,
di $ABCR = \frac{1}{2}5p \cdot 3p = \frac{15}{2}p^2$,
di $ABCF = \frac{3}{2}p^2(5 - 3\tang m)$, la retta

$$EF = AF \frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos(m+\omega)}, \text{ l'area di}$$

$$AEF = \frac{1}{2}\overline{AF}^2 \frac{\cos m \operatorname{sen}\omega}{\cos(m+\omega)}; \text{ e però}$$

$$P = \frac{1}{2}gp^2\left(15 - 9\tang m - (4 - 3\tang m)^2 \frac{\cos m \operatorname{sen}\omega}{\cos(m+\omega)}\right);$$

ed $S = \frac{1}{2}(CF - EF)^2 \cos m$, ossia eguale ad

$$\frac{1}{2}\frac{p^2}{\cos m}\left(3 - (4 - 3\tang m)\frac{\cos m \operatorname{sen}\omega}{\cos(m+\omega)}\right)^2$$

oppure $S = \frac{p^2 \cos m}{2\cos^2(m+\omega)}(3\cos\omega - 4\operatorname{sen}\omega)^2$, per essere

$$3 - (4 - 3\tang m)\frac{\cos m \operatorname{sen}\omega}{\cos(m+\omega)} = \frac{\cos m}{\cos(m+\omega)}(3\cos\omega - 4\operatorname{sen}\omega).$$

Quindi, siccome la quantità, che dev' essere positiva o nulla, è espressa da

$$\frac{1}{4}P(3\cos\omega - 4\operatorname{sen}\omega) - \frac{1}{4}S\Big(3\operatorname{sen}(m+\omega) + 4\cos(m+\omega)\Big);$$

così sarà essa eguale ad

$$\frac{1}{8}gp^2\left(15 - 9\tang m - (4 - 3\tang m)^2 \frac{\cos m \operatorname{sen}\omega}{\cos(m+\omega)}\right)$$
$$(3\cos\omega - 4\operatorname{sen}\omega)$$
$$-\frac{p^2\cos m}{8\cos^2(m+\omega)}(3\cos\omega - 4\operatorname{sen}\omega)^2\Big(3\operatorname{sen}(m+\omega) + 4\cos(m+\omega)\Big),$$

ossia eguaglierà il prodotto di $\frac{1}{8}p^2(3\cos\omega - 4\operatorname{sen}\omega)$ in

$$g\left(15 - 9\tang m - (4 - 3\tang m)^2 \frac{\cos m \operatorname{sen}\omega}{\cos(m+\omega)}\right)$$
$$-\frac{\cos m}{\cos^2(m+\omega)}(3\cos\omega - 4\operatorname{sen}\omega)\Big(3\operatorname{sen}(m+\omega) + 4\cos(m+\omega)\Big).$$

Pertanto il segno di quest' ultima quantità dipenderà da quello del suo secondo fattore, il quale, ponendovi $\tang m = x$, $m + \omega = \theta$, e $\tang \theta = y$, si riduce a

$$g\left(15-9x-(4-3x)^2\frac{y-x}{1+x^2}\right)-(3y+4)\left(\frac{3+4x+(3x-4)y}{1+x^2}\right);$$

vale a dire dal segno della

$$g\Big((15-9x)(1+x^2)-(4-3x)(y-x)\Big)$$
$$-(3y+4)\Big(3+4x+(3x-4)y\Big);$$

cioè ponendo $\frac{3}{2}$ in luogo di g, ed ordinando il risultamento rispetto alla y, il segno della suddetta quantità dipenderà da quello della seguente

$$21-11x-27x^2-(34-24x+27x^2y+6(4-3x)y^2.$$

Se in quest' ultima espressione si fa $x=0$, si ha

$$21-34y+24y^2,$$

quantità, che ha un minimo valore rispetto alla y, che è positivo: ciò che significa, che la porzione $ABCE'$ non può sdrucciolare in giù della sua base $E'A$, come abbiamo trovato altrimenti sopra.

Se nella stessa espressione anzi esposta si fa $x=1$, si ottiene

$$-17-37y+6y^2:$$

quantità, che non è resa negativa da $y=1$ ossia da $\omega=0$; e però la x richiesta potrà essere sibbene positiva, ma dovrà essere minore di uno.

La presente quistione è adunque così ridotta allo scoprimento del massimo valore della x, fra i positivi e minori della unità, che sostituiti nella espressione

$$21-11x-27x^2-(34-24x+27x^2)y+6(4-3x)y^2$$

la riducono ad una funzione della sola y, la quale riesca positiva per tutti i valori d'y, da $y = x$ fino ad $y = \tang(m + CAD) = \frac{x+f}{1-fx} = \frac{4x+3}{4-3x}$.

Varj sono i metodi, che si presentano per determinare un tale valore d'x; io mi atterrò al seguente, come più semplice di ogni altro, che ho saputo immaginare.

L'espressione
$6(4-3x)y^2 - (34-24x+27x^2)y + 21 - 11x - 27x^2$,
essendo resa minima da $y = \frac{34-24x+27x^2}{12(4-3x)}$,
e questo valore d'y, risultando maggiore d'x e minore di $\frac{4x+3}{4-3x}$, almeno per x positiva e minore della unità, il valore richiesto della medesima x sarà il minimo di quelli, che renderanno positivo lo stesso minimo valore della
$6(4-3x)y^2 - (34-24x+27x^2)y + 21 - 11x - 27x^2$,
il quale risulta

$$\left(24(4-3x)(21-11x-27x^2) - (34-24x+27x^2)^2\right) : 24(4-3x).$$

Ma siccome il denominatore $24(4-3x)$ di questo risultamento è positivo per tutti i valori di $x < \frac{4}{3}$; così il valore dimandato della x sarà il minimo di quelli, che renderanno positivo

$$24(4-3x)(21-11x-27x^2) - (34-24x+27x^2)^2.$$

Sviluppando le operazioni indicate in quest' ultima espressione, e riducendo, essa si trova eguale alla seguente $860 - 936x - 4212x^2 + 3240x^3 - 729x^4$, la quale è resa positiva da tutti i valori d'x sino

al $\frac{4001}{10000}$, ed è resa negativa da $x = \frac{4002}{10000}$; quindi il valore richiesto della x sarà prossimamente eguale a 0, 4001.

Questo valore della x, ossia della tangente dell' angolo m, corrisponde all'angolo di ventitre gradi e quarantotto minuti primi prossimamente.

Dovrei ora passare, a determinare la massima inclinazione che può avere CF colla verticale CR, senza porre l' argine $ABCF$ in pericolo che una sua porzione analoga alla $ABCE$ ribalti intorno al punto A; ma siccome quest' angolo risulta maggiore di 21°, 48'; così qui mi limiterò a dimostrare, che ammessa quest' ultima inclinazione, nessuna porzione analoga all' anzidetta, può essere ribaltata intorno ad A, ossia che la inclinazione della FC, per la quale non avviene moto di traslazione, è anco sufficiente affinchè non accada moto di rotazione intorno ad A.

Si ponga

tang $FCR = t$, sen $FCR = s$, cos $FCR = c$, ed $EF = x$.

Essendo $AK = BK = CR = 3p$, si avranno i momenti per rispetto al punto A dei pesi delle porzioni ABK, $BCRK$, FCR rispettivamente eguali a

$$9gp^3,\ \tfrac{21}{2}gp^3,\ \tfrac{9}{2}(4-t)gtp^3.$$

Così, per essere il peso della porzione AFE eguale ad $\frac{1}{2}gp(4-3t)cx$, e la parte della AR intercetta fra il punto A e la verticale calata dal centro di gravità del triangolo AEF eguale a $\frac{2}{3}(4-3t)p + \frac{1}{3}sx$, il momento della medesima porzione d' argine AFE rispetto al punto A sarà

$$\tfrac{1}{3}(4-3t)^2cgxp^2 + \tfrac{1}{6}spcg(4-3t)x^2.$$

Per tanto il momento rispetto al punto A della porzione $ABCE$, il quale eguaglia la somma dei momenti delle ABK, $BCRK$, meno la somma di quelli delle FCR, AFE, risulterà

$$9gp^3+\tfrac{27}{2}gp^3-\tfrac{9}{2}gp^3(4-t)t-\tfrac{1}{3}gp^2cx(4-3t)^2-\tfrac{1}{6}gcspx^2(4-3t).$$

Similmente, fatto (fig. 24) $EH=\frac{1}{3}EC$; e condotte l'orizzontale HO e la verticale HV; e ritenute che V, O indichino le componenti dirette secondo le HV, HO della pressione esercitata dall'acqua sulla scarpa EC, si trova

$$O=\tfrac{1}{6}(3p-cx)^2,\qquad V=\tfrac{1}{2}t(3p-cx)^2, \text{ ed}$$
$$HO=\tfrac{2}{3}t(3p-cx), \text{ e } CO=\tfrac{2}{3}(3p-cx); \text{ e però}$$
$$HV=p+\tfrac{2}{3}cx, \text{ ed } AV=4p-\tfrac{2}{3}t(3p-cx)=2(2p-pt+\tfrac{1}{3}sx);$$

e per conseguenza il momento rispetto al punto A della pressione esercitata dall'acqua sulla EC, che è espresso da $V\cdot AV+O\cdot HV$, risulterà eguale a
$t(2p-pt+\frac{1}{3}sx)(3p-cx)^2+\frac{1}{6}(3p+2cx)(3p-cx)^2$.
Quindi la quantità, che dovrà essere positiva od almeno nulla, affinchè la porzione d'argine $ABCE$ non sia ribaltata intorno ad A sarà

$$\tfrac{39}{2}gp^3-\tfrac{9}{2}g(4-t)tp^3-\tfrac{1}{3}cgp^2(4-3t)^2x-\tfrac{1}{6}gcsp(4-3t)x^2$$
$$-t(2p-pt+\tfrac{1}{3}sx)(3p-cx)^2-\tfrac{1}{6}(3p+2cx)(3p-cx)^2,$$

la quale si riduce alla

$$\tfrac{3}{4}p^3\Big(3(11-20t+7t^2)-2(16-18t+27t^2)y$$
$$+9(2-4t+5t^2)y^2-12(1+t^2)y^3\Big),$$

facendo in essa le operazioni indicate, e ponendo $\frac{3}{2}$ per g, ed y per $\dfrac{cx}{3p}$. Ma siccome $\frac{3}{4}p^3$ è necessaria-

mente sempre positivo, così la quantità, che dovrà essere positiva od almeno nulla per tutti i valori d'y da zero sino ad uno, perchè non abbia luogo il movimento di cui si parla, sarà la sola seguente

$$3(11-20t+7t^2)-2(16-48t+27t^2)y$$
$$+9(2-4t+5t^2)y^2-12(1+t^2)y^3$$

Si potrebbe qui cercare, come si è detto sopra, qual sia il massimo valore di t, il quale rende questa quantità positiva per tutti i valori d'y da $y=0$ sino ad $y=1$. Ma io non intraprenderò questa indagine, poichè solo basterà mostrare che fatto $t=0,4002$, questa quantità è positiva sempre dentro cotali limiti, e che se non v'ha ribaltamento nel caso di $t=0,4002$ esso non v'ha nemmeno quando $t<0,4002$. Anzi potendosi dimostrare che la quantità suddetta si mantiene positiva per tutti i valori di y da zero ad *uno* anche allorquando $t=\frac{1}{2}$, io il farò, perchè così riesce più agevole il calcolo. Facendo pertanto $t=\frac{1}{2}$ essa quantità diviene

$$\tfrac{1}{4}(33+10y+45y^2-60y^3):$$

ed eguagliando a zero questo resultato si ottiene una equazione, che ha una sola radice positiva; per cui esso può avere un solo cangiamento di segno dando alla y dei valori successivamente crescenti dallo zero in su. Ma i suoi valori corrispondenti ad $y=0$, $y=1$ sono entrambi positivi; adunque sarà positivo per tutti i valori da $y=0$ sino ad $y=1$. Quindi non vi sarà ribaltamento nemmeno quando si abbia $t=0,5$. Conviene ora mostrare che non essendovi ribaltamento per una data inclinazione, esso non v'è nemmeno per le inclinazioni maggiori

ossia pei valori minori dell' angolo FCR (fig. 23).

Sia $ABCF$ (fig. 25) un argine colla scarpa interna sporgente sull'acqua, di tale inclinazione che non vi sia pericolo di ribaltamento dall' interno all' esterno: questo pericolo non vi sarà neppure, quando essa inclinazione si renda maggiore, ossia quando l' angolo FCR si renda più acuto.

Prendasi $RF' < RF$, congiungasi $F'C$, e sia $ABCF'$ il profilo di un nuovo argine. Si avrà ottenuto l' intento, se si riescirà a dimostrare che, condotta per A una qualunque retta AEE', sarà più difficile il ribaltamento del pezzo $ABCE'$ appartenente al secondo argine, che non è quello del pezzo $ABCE$ appartenente al primo.

Per dimostrare che ciò avviene effettivamente paragoniamo le forze che hanno parte al ribaltamento in ambedue i casi. Conducansi dai punti E, E' le due EH, $E'H'$ verticali; e sia L l' incontro delle rette $E'H'$, CF.

Pel pezzo $ABCE$, contribuisce al ribaltamento la componente orizzontale della pressione dell' acqua, la quale opera collo stesso momento come se l' acqua premesse direttamente contro la EH; alla stabilità in vece contribuisce il peso assoluto del pezzo $ABHE$, più il peso relativo del pezzo EHC considerato siccome immerso nell' acqua.

Pel pezzo $ABCE'$ contribuisce al ribaltamento la componente orizzontale della pressione dell' acqua sulla CE', la quale opera collo stesso momento come se l' acqua si appoggiasse alla $E'H'$; alla stabilità contribuisce invece il peso assoluto di $ABH'E'$, col peso relativo dell' $E'H'C$. Paragonando ora i

momenti delle due forze che contribuiscono al ribaltamento, si scorge essere maggiore quella pel pezzo *ABCE*; poichè condotta da *E'* una orizzontale, la *EH* verrà distinta in due parti, di cui la superiore, quando fosse rimossa la parte *CHE* verrebbe spinta dall'acqua colla stessa forza e collo stesso braccio di leva rispetto ad *A*, con cui lo sarebbe la *H'E'*, supposta rimossa la parte *E'H'C*: la parte inferiore poi della *EH*, la quale ha un termine in *E* e l'altro nel segamento dell'anzidetta orizzontale, sentirebbe un'altra pressione il cui momento rispetto ad *A* sarebbe l'eccesso del momento della pressione su *EH* sopra il momento della pressione su *E'H'*, ossia del momento della spinta orizzontale esercitata contro *CE* sopra il momento della spinta orizzontale esercitata su *CE'*.

Riguardo alle forze che si oppongono al ribaltamento avviene tutto il contrario, essendo maggiori i momenti di quelle del pezzo *ABCE'*. Di fatto, quelle pel pezzo *ABCE* si possono distinguere nelle tre seguenti: peso assoluto di *ABHE*, peso relativo di *EHH'C*, peso relativo di *H'LC*. Così pure quelle del pezzo *ABCE'*, si possono distinguere in queste altre tre: peso assoluto del pezzo *ABHE*, peso assoluto del pezzo *EHH'E'*, peso relativo del pezzo *H'E'C*. Ora il momento della prima di queste ultime tre eguaglia il momento della prima delle prime tre; il momento della seconda di queste medesime ultime tre supera quello della seconda delle altre tre; e finalmente il momento della terza delle ultime supera quello della terza delle altre tre medesime cioè di quelle relative al pezzo *ABCE*.

Il pezzo $ABCE'$ adunque essendo spinto al ribaltamento con momento minore, ed essendo trattenuto dal ribaltamento stesso con momento maggiore, rispettivamente dei momenti analoghi relativi al pezzo $ABCE$, sarà esso sulla AE' più stabile del pezzo $ABCE$. Lo stesso avverrà per qualunque altra sezione analoga alla AE', poichè questa si è condotta arbitrariamente dentro l'angolo CAR; adunque l'argine $ABCF'$ è, riguardo al ribaltamento in quistione, più stabile dell'argine $ABCF$.

Quindi, se la scarpa CF farà colla verticale CR l'angolo avente per tangente $\frac{4001}{10000}$, nessuna porzione analoga alla $ABCE$ potrà essere ribaltata intorno al punto A, il che è ciò, che si voleva dimostrare in secondo luogo.

Per soddisfare completamente la proposta proposizione rimane ancora a vedersi, se l'acqua appoggiata alla scarpa CF, che fa colla verticale CR un angolo avente per tangente $\frac{4001}{10000}$ o prossimamente $\frac{2}{5}$, potrà impedire a qualunque porzione della $ABCF$ di sdrucciolare sulla sua base, di ribaltare intorno al termine inferiore della base stessa e cadere con ciò nell'acqua, come pure di sdrucciolare in su per la base medesima verso la campagna esterna.

Ma siccome dalla proposizione penultima si ha, che, se alla porzione $ABCF$ (fig. 24) d'argine non mancasse la porzione terrea ... ABM ..., l'acqua appoggiata alla scarpa CF, impedirebbe a qualunque porzione di ... $AFCM$ ... di cadere nell'acqua; purchè l'angolo FCR non oltrepassasse $54°, 44'$ circa;

e la mancanza della porzione ... ABM ... è evidentemente sfavorevole a questa caduta, così per questa mancanza, e per essere l'angolo FCR minore di 54°, 44', essendo esso di 21°, 48', nessuna porzione di $ABCF$ si troverà in pericolo di cadere nell'acqua, nè per moto di traslazione nè per moto di rotazione.

Similmente, per essere $\frac{g-1}{f(g+1)}$ eguale ad $\frac{4}{15}$ nel caso di $g=\frac{3}{2}$, ed $f=\frac{3}{4}$; così pel caso quarto della proposizione precedente, nessuna porzione dell'argine $ABCF$ sarà smossa in su per la rispettiva base.

Concludiamo pertanto a compimento anco della presente proposizione, che la massima porzione dell'argine $ABCD$ (fig. 23), che si potrà staccare dal medesimo, senza porlo in pericolo di veruna rottura, sarà la FCD, il cui lato CF fa a sinistra colla verticale CR l'angolo FCR di gradi ventuno e quarantotto minuti primi prossimamente.

Questa parte è maggiore di una metà dell'argine intero, giacchè essa sta alla rimanente $ABCF$ come ventuno a diciannove prossimamente.

Corollario. Combinando le cose dette in quest'ultima proposizione ed in altre antecedenti, è facile a comprendersi che ciò che si è detto per l'argine intero $ABCF$ vale per qualsivoglia porzione di esso situata sopra ad una sezione orizzontale.

Osservazione I. Riunendo tutto quello che si è esposto in queste ultime due proposizioni si comprende, che, se per disavventura da un argine di forma ordinaria a cui si appoggiasse dell'acqua si staccassero di mano in mano delle piccole parti verso

la base, la prima cosa alla quale bisognerà pensare per iscansare la rottura del medesimo sarà di impedire che sdruccioli qualsivoglia sua porzione sulla base di essa e verso la campagna esterna, essendo questo sdrucciolamento il moto più facile a prodursi.

Le medesime cose ci insegnano anco che quelle rotture d'argini, che hanno luogo perchè sono trasportate alcune porzioni di essi sulla campagna esterna, debbono avere le loro mosse da una traslocazione di esse parti, appunto come suole succedere: tutto il contrario di quelle rotture, che hanno luogo, allorchè cadono nell'acqua sostenuta le parti dell'argine medesimo.

Osservazione II. Ciò che si è fatto in quest'ultima proposizione per l'argine determinato nella diciottesima proposizione, e ciò che si è fatto nella penultima per quello trovato nella diciassettesima, si potrebbe estendere ad un argine avente la scarpa esterna comunque inclinata all'orizzonte, ed il piano di una qualsivoglia larghezza; anzi si potrebbe considerare anco la larghezza del piano come un elemento a determinarsi; ma siccome per arrivare a qualche importante conclusione bisognerebbe alla perfine individuare quegli elementi dell'argine, che sono dati, stante la eccessivamente grande complicazione dei calcoli; così stimo meglio di limitarmi ad una esposizione delle solo regole generali, che si potranno seguire nel trattare di siffatte importantissime quistioni, senza punto discendere a nessuna applicazione o caso particolare di esse.

Primieramente si troverà il minimo angolo, che si potrà fare dalla scarpa interna col piano dell'ar-

gine, senza porre l'argine stesso nel pericolo, che una sua porzione sdruccioli in basso sulla rispettiva base verso la campagna esterna; in secondo luogo si farà altrettanto avendo di mira il moto di rotazione a cui la medesima porzione od altra simile può andar soggetta intorno al lato esteriore della stessa sua base; in terzo luogo troverassi il minimo degli angoli che debba farsi dalla stessa scarpa col piano, affinchè nessuna porzione d'argine cada in qualunque maniera nell'acqua appoggiata ad esso, come pure affinchè non sia spinta in su per la medesima sua base verso la campagna esterna: ed il maggiore di questi angoli minimi sarà il richiesto.

Osservazione III. Per determinare ciascuno dei suddetti cinque angoli minimi, qualora non si presentino regole particolari semplici, si potrà sempre ricorrere alla seguente, che si può usare per la determinazione di tutti.

Si indichi colla y, la quantità da cui dipende la inclinazione coll'orizzonte o la posizione della base di una qualunque delle porzioni d'argine analoga a quelle sino ad ora considerate; e colla x quell'altra quantità cui cercasi il massimo o minimo valore. Così si esprima colla $F(x, y)$ l'eccesso delle azioni delle forze, che tendono ad ispostare la detta porzione, su quelle delle opposte, cioè si intenda quella quantità che dev'essere positiva, acciocchè la porzione d'argine a cui essa si riferisce sia stabile. Similmente si indichino colle $\varphi(x)$, $\psi(x)$ i limiti dei valori d'y, e propriamente colla $\varphi(x)$ il minore di essi e colla $\psi(x)$ il maggiore; e per fissare le idee, si debba cercare il minimo fra i valori

della x, che sostituiti nelle funzioni $F(x,y)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ in luogo della x medesima, danno tre quantità, di cui la prima si mantenga positiva per tutti i valori della y compresi fra le due altre.

Si trovino due valori A, B della x, il primo minore e l'altro maggiore del minimo valore richiesto, e ciascuno dei quali sia non molto lontano dal medesimo minimo cercato, ciò che non è difficile a farsi, qualunque sia l'eccesso $F(x,y)$; indi si divida lo stesso eccesso $F(x,y)$ per tutti quei suoi divisori esatti nei quali ponendo in luogo della x, se pure essa vi sia, qualunque numero compreso fra A e B diano altrettanti risultamenti, che si mantengano positivi per tutti i possibili valori d'y compresi fra i valori corrispondenti dei limiti $\varphi(x)$, $\psi(x)$ qualora in essi divisori vi sia anco la y; e sia $\Delta(x,y)$ il quoto esatto, che si ottiene da tale divisione. Fatto ciò si formi l'equazione $\left(\frac{d\Delta}{dy}\right)=0$, e si cavi da essa la y, ed abbiasi $y=f(x)$.

Si suppongano descritte nelle ABC, DEF (fig. 28) le due linee, le quali hanno per equazioni, la prima $y=\psi(x)$ e la seconda $y=\varphi(x)$, fra le coordinate rettangole x,y riferite agli assi Ox, Oy; e determinisi quella loro minima ascissa, che rende le quantità

$$\Delta\Big(x,\varphi(x)\Big),\quad \Delta\Big(x,\psi(x)\Big)$$

entrambe positive od almeno nessuna di esse negativa, la quale sarà maggiore od eguale all'A; e questa minima ascissa sia espressa dalla OP, e tirisi la PEB perpendicolare alla Ox. Indi si formi l'equazione $\Delta(x,y)=0$.

Se la linea espressa da quest' ultima equazione non attraverserà lo spazio ... $CBEF$ ... il valore cercato della x sarà lo stesso OP; se poi questa linea passerà a traverso dello spazio medesimo ... $CBEF$ ... si scopra se essa linea abbia qualche punto a cui corrisponda una massima ascissa, nel qual caso si trovino le coordinate corrispondenti ad esso punto. In quest' ultimo caso, se il punto a cui corrisponde la massima ascissa cadrà nello spazio anzidetto, la sua ascissa esprimerà il valore cercato della x; e se questo punto singolare della linea espressa dalla equazione $\Delta(x,y)=0$, non cadrà nello spazio ... $CBEF$ ... si trovino le ascisse comuni ad essa ed alle linee ABC, DEF, che la maggiore di queste ascisse sarà il valore cercato della x.

Non espongo le ragioni di queste dichiarazioni, come pure varie riflessioni relative ad esse, perchè esse riesciranno facili dopo la lettura delle ultime proposizioni.

Come si è determinato il minimo valore della x, il quale posto nell'eccesso $F(x,y)$ dà una funzione della y, che si mantiene positiva per tutti quelli della y medesima compresi fra $\phi(x)$, $\psi(x)$, così si scioglieranno anco all' occorrenza le altre analoghe quistioni.

Varie altre regole vi sono per soddisfare la nuova quistione de' massimi e minimi qui sopra esposta, fra le quali la più semplice ad enunciarsi è la seguente « quale è il minimo od il massimo valore che deve avere la x, perchè la y somministrata dall' equazione $\Delta(x,y)=0$, non abbia valori maggiori di $\phi(x)$, nè minori di $\psi(y)$, ovvero non

abbia valori compresi fra $\phi(x)$, $\psi(x)$ od eguali ad una di queste due funzioni. » Ma tutte queste regole, sebbene eleganti, come questa dichiarata ed anco usata per alcune fra le proposizioni trattate, non ostante sono esse in pratica generalmente più laboriose di quella sopra esposta, come ciascuno può persuadersi col fatto.

Proposizione ventottesima. Problema.

Supposto che un argine sia a cresta, e che l' angolo fatto coll' orizzonte dalla sua scarpa esterna sia quello di equilibrio della terra componente l'argine medesimo; determinare la figura che deve avere la scarpa interna di esso, perchè ogni sua porzione esistente sopra qualsivoglia sezione che passa pel termine inferiore della scarpa esterna, sia appena in equilibrio.

L' argine determinato nella penultima proposizione è il minimo fra gli argini a cresta, che hanno altezze eguali e sono stabili, qualora si voglia la scarpa interna piana; se si prescinde però da quest' ultima condizione, la quale non è necessaria per la stabilità dell' argine, egli è facile a comprendersi, che dalla parte interna del medesimo argine, si potranno levare altre porzioni, senza porlo in pericolo di rottura; giacchè generalmente le porzioni analoghe alla ACE (fig. 20) di esso non solamente sono in equilibrio pel moto di traslazione ma sono anco stabili: per tanto interessante, come è curiosa, riescirà la presente proposizione.

Il profilo dell' argine avente la scarpa cercata sia espresso da $DACN$.. (fig. 27); la stessa scarpa

cercata dalla linea CMN; una sezione qualunque, fra le suddette, dalla AM. Conducansi l'orizzontale Cx, e le verticali Cy, MP; e pongasi $Ay = e$, $yC = ef = a$, $AM = \varphi$, $CAM = \xi$, $MP = y$, e la $CP = x$; più si ritenga l'angolo CAD, il quale ha per tangente f, espresso coll' α.

Evidentemente sarà $\frac{1}{2} g \int \varphi^2 d\xi$ il peso della porzione ACM; $\int y\, dx$ quello dell' acqua CPM; ed $\frac{1}{2} y^2$ la spinta orizzontale esercitata da questa contro la scarpa CM; e però le espressioni

$$\left(f\cos(\alpha - \xi) - \text{sen}(\alpha - \xi)\right) \tfrac{1}{2} g \int \varphi^2 d\xi,$$

$$\left(f\cos(\alpha - \xi) - \text{sen}(\alpha - \xi)\right) \int y\, dx,$$

$$-\left(f\,\text{sen}(\alpha - \xi) + \cos(\alpha - \xi)\right) \tfrac{1}{2} y^2;$$

ovvero le loro equivalenti

$$\frac{\text{sen}\,\xi}{\cos\alpha} \tfrac{1}{2} g \int \varphi^2 d\xi, \quad \frac{\text{sen}\,\xi}{\cos\alpha} \int y\, dx, \quad -\tfrac{1}{2} \frac{\cos\xi}{\cos\alpha} y^2$$

saranno le forze che spingeranno la porzione d' argine ACM a sdrucciolare in giù della MA. Quindi per la curvatura della scarpa cercata dovrà essere

$$\left(g \int \varphi^2 d\xi + 2 \int y\, dx\right) \text{sen}\,\xi - y^2 \cos\xi = 0;$$

cioè le coordinate di un suo punto qualunque dovranno soddisfare questa equazione o la equivalente

$$g \int \varphi^2 d\xi + 2 \int y\, dx - y^2 \cot\xi = 0.$$

La semplice ispezione della figura mostra che le coordinate x, y, φ, ξ, hanno le relazioni

$$\varphi \cos(\alpha - \xi) - e = x, \quad a - \varphi\,\text{sen}(\alpha - \xi) = y.$$

Eliminando con queste ultime due equazioni, le φ, dall' equazione sopra trovata si ha

$$2(1-g)\int y dx = (1+f^2)\frac{e+x}{y+fx}y^2 - fy^2 - gxy - egy - agx,$$

equazione nella quale vi sono visibilmente le sole coordinate rettangole x, y.

Se le tre equazioni combinate qui sopra per eliminare le ϕ, ξ si combineranno in modo da eliminare le x, y, si otterrà un' equazione, la quale differenziata, somministrerà

$$\left(\operatorname{sen}^2\alpha + (g-1)\operatorname{sen}^2\xi\right)\phi^2 - 2ef\operatorname{sen}\alpha\cos\xi\cdot\phi$$

$$+ 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\xi\left(ef - \phi\operatorname{sen}(\alpha-\xi)\right)\left(\frac{d\phi}{d\xi}\right) + e^2f^2 = 0:$$

Col mezzo di una di queste due equazioni si potrà trovare l' equazione della curva cercata, almeno in serie.

Corollario I. Dalla equazione differenziale di quella fra le x, y, trovata qui sopra, si cava facilmente la $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, il cui valore corrispondente ad $x = y = 0$ si riduce ad $\frac{f\sqrt{g}}{\sqrt{(1+f^2)} - \sqrt{g}}$: la curva in quistione è adunque tangente la scarpa determinata nella proposizione ventiseiesima.

Corollario II. La stessa equazione fra le x, y, nel caso di $g = 1$ dà immediatamente per equazione finita della scarpa cercata, la seguente

$$0 = (1+f^2)\frac{y+fx}{e+x}y^2 - fy^2 - xy - ey - ax.$$

Osservazione I. Colle tre equazioni

$$\phi\cos(\alpha-\xi) - e = x,$$

$$a - \phi\operatorname{sen}(\alpha-\xi) = y,$$

$$g\int\phi^2 d\xi + 2\int y\,dx - y^2\cot\xi = 0$$

eliminando le ϕ, x, e ponendo $\frac{y}{a}\lambda =$, $\frac{\text{sen}\,\xi}{\text{sen}\,(\alpha-\xi)} = t$,
si ha l' equazione

$$(t^2+g-2)\lambda^2-2(1+2t\cos\alpha+t^2)\,\lambda\left(\frac{d\,\lambda}{d\,t}\right)+2(1-g)\lambda+g=0,$$

la quale si riduce alla

$$2(1+2t\cos\alpha+t^2)\,\psi^2 u\left(\frac{d\,u}{d\,t}\right)-2(1-g)\,\psi\,u-g=0,$$

supposto λ eguale al prodotto della nuova variabile u nella ψ, e la ψ determinata colla equazione

$$(t^2+g-2)\,\psi-2(1+2t\cos\alpha+t^2)\left(\frac{d\,\psi}{d\,t}\right)=0.$$

L' integrazione della trovata equazioue fra t, u facilmente si può ridurre a quella di un' altra che abbia la forma seguente

$$(\dot{x}+\dot{y})\,d\dot{y}-f(\dot{x})\,d\dot{x}=0:$$

dove le $\dot{x}$, y indicano due nuove variabili, e la $f(\dot{x})$ una funzione conosciuta della variabile $\dot{x}$.

Osservazione II. Se le azioni di tutte le forze agenti sulla porzione ACM per ispingerla a seconda della retta AM non si dovessero equilibrare, ma bensì combinarsi in modo di rendere la stabilità di essa porzione eguale ad una funzione $F(\xi)$ dell'angolo ξ, la curvatura della scarpa interna à ciò necessaria verrebbe data dalla equazione

$$\left(g\int\phi^2\,d\xi+2\int y\,d\,x\right)\text{sen}\,\xi-y^2\cos\xi=2F(\xi).$$

Osservazione III. Nello stesso modo, che si è trovata l' equazione della curvatura della scarpa interna dell' argine qui sopra considerato, perchè ogni sua porzione analoga alla ACM fosse appena appena in equilibrio sulla rispettiva base MA, si potreb-

bero determinare le equazioni delle scarpe per altre forme d'argini qualsivogliano, ed anco quelle, che esprimono le curvature delle scarpe analoghe, affinchè le porzioni simili alla suddetta non ribaltassero intorno ai lati esteriori delle rispettive basi, e fossero anco per questa parte appena in equilibrio. Di quest' ultimo caso se ne vedrà qui sotto un esempio.

Osservazione IV. Quella porzione d'argine, che sarà dalla parte interna, tanto rispetto alla linea esprimente la scarpa, quando si ha riguardo al solo moto di traslazione, quanto a quella che esprime la scarpa interna che dovrebbe avere l'argine, allorchè si considera il solo moto di rotazione suddetto, sarà quella porzione effettivamente, che si potrà levare dall'argine, senza metterlo in pericolo di veruna rottura; semprechè l'acqua sostenuta dalla scarpa interna sia atta ad impedire, che la terra sdruccioli o ribalti dentro di essa; più che tutte queste proprietà dell'argine intero abbiano luogo anco per qualsivoglia sua porzione superiore a qualunque sezione di esso medesimo.

Proposizione ventinovesima. Problema.

Ammesso lo stesso dato della proposizione precedente, trovare la figura della scarpa interna, affinchè l'acqua non possa avere nessuna azione a far isdrucciolare la porzione d'argine, contemplata nella stessa precedente proposizione, sulla sua base?

Ritenuta la curva qui cercata espressa dalla stessa CMN... e ritenute anco le costruzioni e denominazioni già fatte nella proposizione citata, si trova

che per ogni punto della linea richiesta si deve verificare l' equazione

$$2\int y\,dx - y^2 \cot \xi = 0.$$

Combinando l'equazione derivata di questa equazione colle due $x = \varphi \cos(\alpha - \xi) - e$, $y = a - \varphi \operatorname{sen}(\alpha - \xi)$, in modo di eliminare le x, y, si trova

$$\left(\frac{d\varphi}{d\xi}\right) - \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \xi)}{2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\xi}\,\varphi + \frac{a}{2 \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\xi} = 0,$$

la quale integrata somministra

$$\varphi = \left\{A - \frac{a}{2\cos\alpha}\int \frac{d\xi}{\sqrt{e^{\frac{\xi}{f}} \operatorname{sen}^3 \xi}}\right\}\sqrt{e^{\frac{\xi}{f}}} \operatorname{sen}\xi:$$

dove la A esprime qui la costante introdotta dalla integrazione.

Questa costante si potrà determinare colle condizioni espresse dalle equazioni $\varphi = \frac{e}{\cos\alpha}$, $\xi = 0$.

Osservazione I. La linea qui contemplata è un caso particolare di quella considerata nella proposizione precedente, e propriamente è quella che risponde al caso di quest' ultima pel quale $g = 0$.

Osservazione II. Se la scarpa $CMN\ldots$ dovesse essere rettilinea, e si volesse la lunghezza della AM, perchè non isdrucciolasse giù della stessa MA, la porzione d' argine ACM esistente sulla sezione medesima AM, e facente un dato angolo ξ colla AC, l' equazione a sciogliersi, per avere l' AM, sarebbe

$$\tfrac{1}{2} g\,\varphi \frac{e}{\cos\alpha} \operatorname{sen}\xi + \tfrac{1}{2} x y \operatorname{sen}\xi - \tfrac{1}{2} y^2 \cos\xi = 0;$$

vale a dire converrebbe combinare le equazioni

$$eg\varphi \operatorname{sen}\xi + xy\cos\alpha - y^2\cos\alpha\cot\xi = 0\,,$$

$$x - \varphi\cos(\alpha - \xi) + e = 0\,,\quad y - a + \varphi\operatorname{sen}(\alpha - \xi) = 0$$

in maniera di eliminare le x, y; indi cavare dalla equazione risultante il valore di φ.

Eliminando dalle tre equazione qui esposte le ξ, φ, si ha

$$xy = (1 + f^2)\frac{e + x}{y + fx}y^2 - fy^2 - egy - agx,$$

alla quale si può dare la forma

$$(1 - g)xy = (1 + f^2)\frac{e + x}{y + fx}y^2 - fy^2 - egy - agx - gxy:$$

equazione che esprime il luogo geometrico dei punti analoghi all' M, e che ha molta relazione con quella della linea considerata nella proposizione precedente.

Nel caso di $g = 1$, l'equazione qui trovata si riduce alla

$$0 = (1 + f^2)\frac{e + x}{y + fx}y^2 - fy^2 - ey - ax - xy,$$

la quale coincide con quella esposta nel corollario secondo della stessa proposizione antecedente: appunto come doveva succedere.

Osservazione III. Se la scarpa interna di qualunque porzione ACM dell' argine in quistione dovesse essere rettilinea, come nella osservazione precedente, e si volesse la lunghezza della AM, perchè l'acqua non avesse nessuna azione sul moto di traslazione della parte stessa sulla sua base MA, l'equazione a trattarsi sarebbe evidentemente la

$$\tfrac{1}{2}xy = \tfrac{1}{2}y^2\cot\xi,$$

la quale somministra tang $\xi = \frac{y}{x}$; cioè l'angolo MCP eguale allo ξ, ossia al CAM. Quindi circoscritta al

triangolo isoscele ACD la periferìa circolare, ed estesa la retta AM... sino ad incontrarla di nuovo, in questa corda avrassi la lunghezza cercata della base della porzione $CA..M$ d' argine; più il luogo geometrico dei punti analoghi all' M, sarà quella porzione di siffatta periferìa, che avrà i termini uno in C e l' altro in D.

Osservazione IV. Se la scarpa $C..M$ dovesse consistere in un poligono tale che la porzione d' argine $MAC..M$ fosse appena in equilibrio sulla sua base MA, ed una simile proprietà dovesse aver luogo per tutte le sezioni passanti per A e pei vertici dello stesso poligono, le coordinate dei vertici del medesimo soddisfarebbero l' equazione seguente

$$g\Sigma\varphi_{n+1}\,\text{sen}\,\xi_{n+1}+\Sigma(2y_n\Delta x_n+\Delta y_n\Delta x_n)=y_n^2\cot\xi_n\,;$$

dove n esprime l' indice degli angoli del poligono stesso, e Σ l' integrale finito di ciò che segue immediatameute al medesimo segno.

Combinando l' equazione qui trovata colle due

$$x_n=\varphi_n\cos(\alpha-\xi_n)-e\,,\quad y_n=a-\varphi_n\,\text{sen}\,(\alpha-\xi_n)$$

si potrebbe trovare una equazione alle differenze finite del poligono di cui si parla, la quale insieme a qualche altra sua proprietà assunta si potranno trovare le equazioni di esso medesimo.

Proposizione trentesima. Problema.

Trovare la curvatura della scarpa interna dell' argine medesimo considerato nella proposizione diciottesima, perchè qualunque sua porzione insistente

sopra una qualsivoglia sezione che passa pel vertice inferiore ed esteriore della base sua sia appena in equilibrio rispetto al moto di rotazione intorno al vertice stesso?

Si esprima colla CA (fig. 28) la scarpa esterna, colla CMN la cercata curvatura, colla AD una orizzontale, e si conducano la verticale AO, e le orizzontali CO, PM; più si riferisca la linea cercata agli assi OC, OA, e si ponga $MP=y$, $PO=x$, $AO=a$, ed $OC=e$.

Evidentemente il momento della porzione d'argine ACM rispetto al punto A sarà espresso da

$$\tfrac{1}{2}g\int y^2dx+\tfrac{1}{6}g(a-x)y^2-\tfrac{1}{6}gae^2.$$

Così per essere $\int(a-x)x\,dx$ il momento dell'acqua proveniente dalla spinta orizzontale, ed

$\int xy\,dy=\int xy\left(\frac{dy}{dx}\right)dx$ quello di essa proveniente dalla sola spinta verticale, sarà

$$\int\left(xy\left(\frac{dy}{dx}\right)+ax-x^2\right)dx$$

il momento totale, col quale l'acqua tenderà a ribaltare la porzione CMA intorno al medesimo punto A. Quindi per ogni punto della linea cercata dovrà verificarsi l'equazione seguente

$$\tfrac{1}{2}g\int y^2dx+\tfrac{1}{6}g(a-x)y^2-\tfrac{1}{6}age^2$$
$$=\int\left(xy\left(\frac{dy}{dx}\right)+ax-x^2\right)dx.$$

Da questa equazione, mediante la derivazione, si ha la

$$\left\{(g+3)x-ag\right\}y\left(\frac{dy}{dx}\right)-gy^2+3ax-3x^2=0,$$

la quale integrata somministra

$$y^2 = e^{\int \frac{2g dx}{gx+3x-ag}} \left\{ A - 6 \int e^{-\int \frac{2g dx}{gx+3x-ag}} \frac{ax-x^2}{gx+3x-ag} dx \right\};$$

dove la A esprime uua costante arbitraria.

Eseguendo tutte le integrazioni qui indicate si ottiene l'equazione

$$y^2 = (x-a)^2 + A(3x+gx-ag)^{\frac{2g}{3+g}},$$

ovvero la

$$y^2 = x^2 + (e^2 - a^2)\left(\frac{3a+3x+gx}{3a+3a+ga}\right)^{\frac{2g}{3+g}};$$

supposto che la x attuale esprima la PA, e che la costante sia determinata colla condizioue che la curva deve passare pel punto C.

Corollario I. Se nella equazione differenziale qui sopra trovata si fa $x=0$ ed $y=e$, si ottiene $-age\left(\frac{dy}{dx}\right) - ge^2 = 0$; dove qui la $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ esprime quel valore della derivata $\left(\frac{dy}{dx}\right)$, che corrisponde ai detti valori delle x, y.

Questa equazione trovata dà $\left(\frac{dy}{dx}\right) = -\frac{e}{a}$; cioè $-\frac{e}{a}$ per la tangente trigonometrica dell' angolo che fa coll' asse OA la toccante la curva in C; quindi la curva in quistione sarà tangente la retta AC nel punto C medesimo.

Corollario II. Facendo $x=0$ nell' ultima equazione generale qui sopra trovata, si ha

$$y^2 = (e^2 - a^2)\left(\frac{3a}{6a+ag}\right)^{\frac{2g}{3+g}} = (e^2 - a^2)\left(\frac{3}{6+g}\right)^{\frac{2g}{3+g}};$$

epperò la distanza fra il punto A ed il segamento fatto alla orizzontale AD dalla curva di cui si tratta sarà eguale alla radice quadrata di

$$(e^2 - a^2)\left(\frac{3}{6+g}\right)^{\frac{2g}{3+g}} \quad \text{cioè a} \quad \left(\frac{3}{6+g}\right)^{\frac{g}{3+g}} \sqrt{e^2 - a^2}\,.$$

Esempio. Pel caso di $g = \frac{3}{2}$, e d'$f = \frac{3}{4}$, quest'ultima quantità si riduce ad $\frac{e}{4}\sqrt[6]{7}$.

Osservazione I. Se si volesse la curvatura della scarpa interna tale, che l'acqua non avesse nessuna influenza sul moto di rotazione sopra considerato, l'equazione a considerarsi sarebbe evidentemente la seguente

$$\int\left(xy\left(\frac{dy}{dx}\right) - ax + x^2\right)dx = 0,$$

cioè le coordinate della linea in quistione dovranno soddisfare questa medesima equazione, la quale perciò dà

$y\left(\frac{dy}{dx}\right) - a + x = 0$, ossia integrando $y^2 = 2ax - x^2 + c$: ove c esprime una costante arbitraria.

Determinando la costante c per modo che ad $y = e$ corrisponda $x = 0$, si trova $c = e^2$; e però la curva richiesta sarà quella espressa dalla equazione

$$y^2 + (x - a)^2 = a^2 + e^2,$$

la quale evidentemente insegna che la linea cercata sarà la porzione CD della periferia circolare avente il centro in A e per raggio $\sqrt{a^2 + e^2} = AC$: come d'altronde si poteva prevedere agevolmente.

Osservazione II. Nella soluzione della proposizione ho supposto tacitamente che la linea cercata dovesse cadere a sinistra della verticale che passa per C: questa ipotesi è sempre legittima per le terre ordinarie, come risulta dalla prima parte della proposizione ventiquattresima.

Osservazione prima.

Se anco dalla parte esterna dell' argine vi fosse appoggiata dell' acqua, l' azione meccanica da essa esercitata sopra di una qualunque di quelle porzioni d' argine oonsiderate sino ad ora si calcolerebbe come si è calcolata quella dell' acqua appoggiata alla scarpa interna: unendo poi opportunamente questa al φ già considerato più volte, si avrebbe la quantità dal segno e dalla cui grandezza dipenderebbe lo stato meccanico di detta porzione d' argine relativamente a qualunque de' movimenti a cui essa potrà andar soggetta. Io non credo di trattenermi ad esporre le quistioni, che tranno origine da questo nuovo risultamento, sebbene curiose ed utili; giacchè esse all'occorrenza si potranno trattare con somma facilità mediante le cose esposte superiormente.

Così, sino ad ora si sono cercate in generale le dimensioni degli argini, perchè essi fossero in equilibrio; si potrebbero trovare anco le dimensioni dei medesimi per modo che essi avessero una data stabilità; ma per la stessa ragione per cui non trattansi le quistioni anzidette, ed anco per non allongarmi maggiormente, stimo bene di ommettere anco queste.

Similmente, tutto quello che si è detto sino ad

ora supposto piane tanto la soglia dell'argine, quanto ambedue le scarpe od almeno l'esterna, si potrebbe dire per un argine avente le scarpe ed il piano o il cappello conformati in qualunque maniera. In ultimo, per compire ciò che ho divisato di esporre rispetto alla stabilità, mi rimarrebbe a parlare delle dimensioni necessarie di un argine, perchè non avvenissero rotture, che trassero la loro origine dalle mosse di porzioni d' argine, le quali avessero le superficie convesse od almeno le latterali cilindriche o coniche, ma siccome questa parte richiede una profonda cognizione del moto delle terre, così la riserbo a migliore occasione.

Osservazione seconda.

Se l' argine si dovrà fare sopra un terreno cueroso, o sopra un terreno scoperto recentemente dall' acqua, oppure nell' acqua stessa, si abbonderà nella base; perchè in questi fondi, quando non si avrà questo riguardo, assodandosi la terra, si staccheranno facilmente l' una dall' altra le parti dell' argine, cioè si faranno delle crepature nel corpo di esso con pericolo di rottura. Così, se l' argine si dovrà formare di sabbia sarà bene abbondare nella larghezza di esso; se poi l' acqua a sostenersi da esso sarà corrente ottimamente si farà, facendo le scarpe, particolarmente l' interna poco inclinata coll' orrizzonte, onde iscansare i tristi effetti, che possono produrre gli urti, i vortici, e singolarmente le sbataizze; cioè sarà bene imitare gli argini naturali, che si veggono dietro i fiumi ed i mari, i quali alle volte

hanno le scarpe che fanno coll' orizzonte angoli aventi per tangenti un tredicesimo del raggio.

Per determinare la inclinazione delle scarpe di un nuovo argine, molte volte si osservano le pendenze delle scarpe degli argini vecchi costruiti con terre simili a quelle colle quali si deve costruire il nuovo, e che hanno avuto un esito felice, senza peccare contro l' economia: in questo caso sarà bene l' osservare, se le scarpe dell' argine vecchio saranno quelle, che aveva nel principio, cioè quando fu costruito, o se esse furono nel seguito alterate, come pur troppo molte volte accadde.

Se l' argine dovrà servire per istrada, la larghezza del suo piano si determinerà avendo di mira non solo la specie della terra colla quale si dovrà formare, ma anco quella della strada; cioè se essa dovrà servire pei soli pedoni, o per le bestie, o pei carri, ecc.

Di due argini formati con terre affatto simili e destinati ad usi analoghi, e di differenti altezze, è bene che si facciano le scarpe del più alto meno inclinate all' orizzonte di quelle dell' altro; anzi ciò è assolutamente necessario quando per la stabilità si faccia conto anco della tenacità della terra. In fine perchè meno rimanga a desiderarsi rispetto alle dimensioni dei profili non voglio neppure tacere la regola materiale addottata da alcuni pratici. Essi fanno gli argini generalmente *Interzati*, cioè aventi il piano eguale all' altezza e la base tripla della medesima; ed alcune volte li fanno anco *Inquartati*, vale a dire tali, che la larghezza del piano eguaglia l' altezza di esso e la base il quadruplo dell' altezza medesima.

PARTE TERZA.

DEL TRASPORTAMENTO DELLE TERRE.

Siccome la determinazione della traccia di un argine, e la costruzione di esso, e particolarmente la determinazione del suo *costo* richieggono assolutamente una estesa cognizione sul trasportamento delle terre, per questo ho divisato di far precedere questa parte alle tre seguenti.

Per ridurre tutto ciò che è relativo al trasportamento delle terre a dipendere da pochi principj e fatti somministrati dalla osservazione e dalla sperienza, è necessario conoscere varie proposizioni, fra le quali le principali sono quelle che si troveranno qui sotto esposte e trattate.

Proposizione prima. Teorema.

Le spese pei trasporti di due masse di terra per vie orizzontali sono in ragione composta diretta dei loro pesi e degli spazj che ad esse si fanno trascorrere, sempreché tutte le altre circostanze da cui dipendono le spese stesse insieme ai mezzi di trasporto siano pari per ambidue le masse a trasportarsi.

Prima di dar principio alla dimostrazione di questa proposizione, quasi per sè stessa evidente, credo bene di avvertire a scanso di qualunque equivoco, che la spesa pel trasportamento di una data massa di terra consiste nella mercede dovuta all' operajo

per la fatica da esso lui sopportata nel trasportare lo strumento carico di terra dal luogo dove è situata la terra a quello dove si deve essa traslocare, più la fatica che egli fa nel ritornare generalmente col semplice strumento al luogo stesso dove è situata la terra a trasportarsi, esclusa cioè la mercede dovuta alla fatica del caricare e dello scaricare lo strumento medesimo.

Premesso ciò, siano P, p i pesi delle due masse di terra dei trasporti di cui si parla; D, d le distanze a cui si trasportano, ossia gli spazj che ad esse si fanno trascorrere; ed S, s siano le spese rispettive. Così s' indichi la spesa necessaria per trasportare una massa in tutto eguale alla M per una strada affatto eguale alla d percorsa dalla massa m.

Essendo S, s' le spese pei trasporti analoghi di due masse eguali fra loro, saranno esse come gli spazj trascorsi colle masse stesse; cioè sarà

$$S : s' = D : d.$$

Similmente essendo s', s le spese pei trasporti analoghi di due masse differenti a distanze eguali, saranno queste direttamente come i pesi delle masse medesime, cioè sarà

$$s' : s = P : p.$$

Moltiplicando fra loro i due primi, i due secondi, ecc. termini di queste due proporzioni si ottiene la seguente

$$Ss' : s's = PD : pd; \text{ e però } S : s = PD : pd,$$

la quale esprime appunto la verità della proposizione proposta.

Corollario. Siano V, v i volumi, e G, g i pesi specifici delle terre trasportate; e si avrà $P = VG$, e $p = vg$; e però $S : s = VGD : vgd$.

Dimodochè, se le terre saranno di pesi specifici eguali, si avrà $S:s=VD:vd$; cioè le spese dei trasporti in ragione composta diretta dei volumi delle terre e degli spazj percorsi da esse. Se poi fosse anco $D=d$, si avrebbe $S:s=V:v$, le spese cioè come i semplici volumi delle terre trasportate. Così se fosse $V=v$ risulterebbe $S:s=D:d$, vale a dire le spese come le distanze corrispondenti.

Osservazione I. Dalla esposta proposizione si vede, che, conoscendosi la spesa pel trasporto di una massa di terra di cui sia noto il peso e la distanza del trasporto medesimo, si potrà trovare con facilità quanto costerà il trasporto di un' altra massa qualunque traslocata a qualsivoglia distanza, qualora sia noto il suo peso e la distanza a cui si debba traslocare. Per esempio, se fossero note d, p, ed s, ed anco D e P colla medesima proposizione esposta si troverebbe la spesa per trasportare quest' ultima terra alla distanza D eguale ad $\frac{sPD}{pd}$. Quindi, se si fisseranno le p, d, ed s per unità di misura dei pesi delle distanze, e delle spese di trasporto, si avrà semplicemente $S=PD$; cioè la spesa di qualunque altro trasporto ordinario di terra espressa od eguale al prodotto del peso di essa nella distanza del trasporto medesimo.

Se poi si ritenessero le p, e d per unità dei pesi e delle distanze e si rappresentasse colla s' l'effettiva spesa per questo trasporto di una unità di peso ad una unità delle distanze, si avrebbe evidentemente $S=PDs'$.

Per esempio. Se si dovessero trasportare 234 metri

cubi di terra per lo spazio di 2400 metri, al prezzo di centesimi 33 per ogni metro cubo trasportato alla distanza di 100 metri si avrebbe

$$P = 234, \ D = \frac{2400}{100} = 24, \ s' = 0,33 \text{ supposto}$$

l'unità la lira; e però

$$S = 234.\ 24.\ 0,\ 33;$$

cioè a mille ed ottocento cinquanta tre lire e ventotto centesimi.

Osservazione II. La proposizione esposta avrà luogo rigorosamente, sempre che le distanze D, d dei trasporti, ossia i viaggi percorsi colle terre trasportate non siano molto differenti, l'uno dall'altra.

Che se le distanze D, d fossero molto differenti l'una dall'altra, onde approssimarsi più al vero rispetto alla spesa, bisognerebbe considerare anco le differenze dei tempi necessari per disporsi al carico ed al ritorno; giacchè sebbene questi tempi siano generalmente piccolissimi a confronto di quelli impiegati nell'effettivo trasporto, nulladimeno per la loro continua ripetizione potrebbero portare qualche divario nella spesa totale: generalmente la spesa diminuisce coll'accrescersi moltissimo le distanze dei trasporti; vale a dire se D, per esempio, sarà grandissima a confronto di d, la spesa S data dalla proporzione

$$S : s = PD : pd$$

risulterà di qualche cosa più grande della spesa effettivamente necessaria per trasportare la terra del peso P alla stessa distanza D.

Quèsta eccezione però alla regola generale sopra esposta rarissime volte avrà luogo nella formazione

degli argini, stante che gli spazj, che si debbono far trascorrere alle terre ossia le distanze dei trasporti per formarli generalmente sono di lunghezza non molto fra loro differenti.

Osservazione III. Fra i modi coi quali si potrebbe determinare la s unità delle spese dei trasporti e corrispondenti alle d, p, unità delle distanze e dei pesi, il più semplice, ed anco conforme più di qualunque altro alla natura della cosa è il seguente.

In una campagna pressochè orizzontale si scielgano due rettangoli $ABCD$, $EFGH$ (fig. 29), i quali siano fra loro eguali perfettamente, ed abbiano i lati AD, EH eguali e situati nella stessa retta AH, ed i loro centri distanti l' un dall' altro da trenta a quaranta metri, che è la lunghezza di un ricambio ordinario; più che la terra corrispondente ad uno di essi, per esempio, all' $ABCD$, almeno sino alla profondità da un mezzo metro ad un metro sia da prato asciutto, che è generalmente della migliore per la formazione degli argini; indi si faccia trasportare la terra, che è entro di quest' ultimo rettangolo sul piano dell' altro con barelle, carriuole, o cestini in numero eguali; e si regoli in modo il trasporto, che le strade siano tutte parallele alla retta AH; che le terre prese nei rettangoletti $ABba$, $abfe$, $efml$, ... si trasportino e si spargano rispettivamente sugli altri $HGdc$, $cdhg$, $ghkn$, ... e finalmente quella presa nell' ultimo $prCD$ si sparga sul primo $EFst$; che gli uomini, che eseguiscono l' effettivo trasporto lavorino da sette ad otto ore per ogni giorno e continuino per più giorni; in ultimo che questi medesimi uomini trovino gli stru-

menti già caricati o preparati così da altri operaj destinati a tal funzione appositamente.

Fatto ciò, si moltiplichi il volume del cavo formato col levare la terra pel peso di una unità sua; così moltiplichisi il volume della terra medesima trasportata al suo luogo destinato pel peso di una sua unità; e si prenda, onde aver un medio, la semisomma di questi due prodotti pel peso della terra trasportata.

Ora, onde esprimere compendiosamente i risultamenti di un siffatto sperimento, si nomini a il numero totale degli uomini trasportatori, b il numero dei giorni di lavoro; e c la distanza fra i centri di gravità dei due rettangoli; π il peso della terra trasportata, trovato dianzi; e finalmente f, ciò che deve guadagnare ogni uomo al giorno, ossia la *giornata*, all' epoca del lavoro per mantenersi in tutto secondo il suo stato inclusivamente al consumo degli utensili.

Evidentemente sarà abf la spesa del trasporto eseguito; e però, supposto p l' unità del peso π, e d quella della distanza c, si avrà

$$c\pi : abf = 1 \cdot 1 : s. \text{ Quindi } s = \frac{abf}{c\pi}:$$

ecco la spesa unitaria. Alcune sperienze, nel caso di f eguale ad una lira e mezzo italiana, di p eguale al peso di un metro cubo di terra, e di d eguale a trenta metri, la terra trasportata essendo ordinaria, somministrarono s eguale a quattordici centesimi.

Osservazione IV. Si potrebbe determinare l'unità s mediante la conoscenza di quel peso che può essere trasportato da un uomo ordinario, ad una data

distanza in un dato tempo, qualunque fosse la materia trasportata; ma siccome da ciò che fa un uomo in un lavoro rarissime volte si può desumere con esattezza quello che egli sia per fare in un lavoro di un' altra specie, così sarà meglio determinare la spesa od unità suddetta colla regola sopra esposta; tanto più che pei comuni trasporti di terra, si potranno prendere per a, b, c, f, e π che entrano nella espressione cercata della s, le quantità analoghe, che si incontrano nella effettiva formazione del primo od al più dei due primi *strati* o *cordoli* di un tronco d' argine comune, e con ciò risparmiare la spesa del sopradescritto sperimento.

Osservazione V. Se tutte le circostanze dalle quali dipende la spesa di un trasporto qualunque di terra non differissero da quelle che avranno luogo nello sperimento eseguito per istabilire il valore della unità di spesa, che nella distanza del trasporto e nel peso della massa trasportata o da trasportarsi, risulterebbe la spesa per qualunque trasporto ordinario eguale al prodotto del peso della terra trasportata o a trasportarsi nella distanza del trasporto medesimo, e quindi nella unità di spesa. Ma siccome le dette circostanze variano generalmente da un trasporto all'altro, così sarà bene conoscere quali sono le altre circostanze, almeno le principali, da cui può dipendere la spesa stessa, onde sapere quali modificazioni si dovranno fare alla regola generale esposta, per approssimarsi anco in questi casi sempre più alla vera spesa richiesta.

La principale fra queste circostanze dalle quali dipende la spesa del trasporto è la *inclinazione* col-

l' orizzonte della via da seguirsi nel trasporto medesimo; e però bisognerà osservare se essa via sarà orizzontale, come l' unitaria d, ovvero se sarà inclinata all' orizzonte; ed in questo caso di quanto essa sarà effettivamente inclinata, più se gli uomini dovranno per essa salire coi carichi ovvero discendere: le altre circostanze poi da cui può dipendere la spesa in quistione, le quali meritano riguardo, sono, se il fondo della strada sia sabbioso, o tenace, o fangoso, od anco entro l' acqua; come pure se la terra a trasportarsi sia pantanosa o ghiajosa; circostanze tutte, che possono far variare la difficoltà del trasporto e però il costo di esso.

Varj sono i modi che si possono usare onde aver riguardo nella valutazione della spesa alle anzidette circostanze; cioè si può aumentare il pagamento per ogni unità di volume della terra a trasportarsi e ritenere la distanza ed il peso della terra come sono effettivamente; si può ritenere il peso e la spesa s trovata, e variare opportunamente la distanza del trasporto o fingere in essa una variazione, perchè l' operajo non venga danneggiato; si può anco variare il solo peso della terra a trasportarsi, considerandola cioè più o meno pesante di quello che è effettivamente; in fine si possono anco variare insieme convenientemente due o anco tutti e tre il prezzo di ogni unità, il peso della terra a trasportarsi, e la lunghezza della via di trasporto, e combinare le cose per modo, che l' operajo non sia pregiudicato. In generale noi terremo fisso il prezzo di ogni unità e la distanza del trasporto ed aumenteremo o supporremo aumentato o diminuito il

peso, vale a dire, supporremo il peso della terra a trasportarsi eguale al suo peso effettivo più o meno, una sua parte; e quest' ultimo peso, sulla cui grandezza fonderemo la stima del trasporto, il chiameremo *peso fittizio* della terra trasportata od a trasportarsi.

Qui bisognerebbe sapere come fia d'uopo per costituire l'idoneo peso fittizio variare il peso effettivo o per ciascuna delle suddette circostanze, almeno per le salite e discese, quando siano note le inclinazioni: ma ci mancano tutt'ora le sperienze o meglio i risultamenti a ciò necessarj se si prescinde da ciò che praticano varj periti, che suppongono, quando le vie di trasporto siano sensibilmente inclinate all' orizzonte, il peso fittizio eguale a tre metà del vero: è per tanto a desiderarsi che queste variazioni ci siano somministrate quanto prima da qualche Ingegnere direttore di lavori ove faccia d'uopo qualche trasporto di terre per vie inclinate all' orizzonte.

Comunemente nel computare la spesa dei trasporti si ritengono la distanza ed il peso effettivo delle terre trasportate, e si accresce quanto si crede necessario per l' equità il prezzo di ogni unità di peso trasportato; anzi alcuni, dopo un esame minuto del volume della terra, della distanza del trasporto e delle altre loro qualità, che hanno parte sulla spesa del trasporto, dichiarono immediatamente il costo del trasporto medesimo, senza punto indagare gli elementi di essa: l' uso di questi due metodi però, i quali in sostanza si riducono ad un solo, sono in certa guisa vere prerogative di coloro, che hanno avuto la fortuna di fare una lunga pratica in siffatti lavori,

cioè che hanno consumata gran parte della loro vita in mezzo ai lavori di tal natura, e che nello stesso tempo ebbero la precauzione di osservare attentamente quanto ciascuna delle suddette circostanze influiva sulla fatica degli uomini destinati al trasporto.

Esposte così le nozioni, che sono necessarie per parlare del trasporto delle terre, dopo la proposizione seguente che verte in gran parte sui trasporti, passerò a trattare le proposizioni più importanti pel caso nostro; ed avverto, che io parlerò in primo luogo di quei trasporti nei quali l' operajo trasporta ogni volta una porzione finita di terra, e poscia dirò anco qualche cosa relativamente a quei trasporti nella esecuzione dei quali si suppone di traslocare una massa di terra trasportandone separatamente i suoi elementi, il che potrà essere utile in molte occasioni, sebbene assolutamente per sè stesso impraticabile.

Per determinare la spesa del trasporto di una, o di due, od anco di più masse di terra, si debbano aver di mira particolarmente tre cose, cioè, la posizione dei luoghi dove sono le masse di terra a trasportarsi, la posizione di quelli nei quali si debbono esse trasportare, e le strade che si debbono o si possono seguire. Anzi, in un trattato compiuto sul trasportamento delle terre, sarebbe bene incominciare dalle proposizioni nelle quali fossero dati i luoghi dove sono le terre, quelli nei quali si dovessero trasportare e le vie a seguirsi nel trasporto; indi parlare di quelle nelle quali sono dati i luoghi medesimi e solamente certe proprietà delle vie di trasporto, non sufficienti ad individuarle; e così, continuando, final-

mente parlare di quelle quistioni nelle quali fossero note solamente certe proprietà dei luoghi dove sono e di quelli dove si debbono trasportare le terre ed incognite tutte le altre cose relative sì ai luoghi medesimi che alle vie a seguirsi nel trasportarle. Noi qui però, trattandosi di esporre solamente quelle proposizioni, che sono pel caso nostro le più interessanti seguiremo altr' ordine, onde conseguire lo scopo che abbiamo di mira colla maggiore semplicità.

Osservazione VI. Nella proposizione esposta si è supposto tacitamente che le circostanze dei trasportamenti e dei mezzi usati per eseguire i trasporti, permettessero di levare gli strumenti dove si caricano e di condurli o spingerli o trasportarli immediatamente ai luoghi dove si deve trasportare la terra: succede però alcune volte che la lunghezza delle vie di trasporto è tale che tale ipotesi non regge; in questi casi, si suolgono regolare i medesimi trasporti in due modi differenti; cioè, o si levano gli strumenti carichi e si conducono per un tronco di strada più o meno lungo secondo la natura della strada ed i mezzi di trasporto, indi si fa succedere un riposo, e poi si continua per un altro tronco analogo, e di nuovo si riposa, e così di seguito: oppure si separano i trasportatori in più società parziali, la prima delle quali leva gli strumenti carichi dove si caricano e li conduce alla fine del primo dei detti tronchi di strada ed ivi li lascia e ritorna con istrumenti vuoti dove si caricano; e la seconda prende gli strumenti carichi anzi lasciati dalla prima e li trasferisce alla fine del secondo tronco e ritorna anch' essa con istrumenti vuoti, e così avvi una terza che fa pel terzo tronco ciò che

le due nominate hanno fatto pei due primi, ecc.; vale a dire, si stabiliscono sulla intera via di trasporto più ricambj o riposi, coll' ultimo dei quali si trasporta la terra al luogo destinato ad essa.

Egli è facile a concepirsi, che, allorchè i successivi tronchi delle vie di trasporto di due trasportamenti saranno eguali fra loro e che le vie di trasporto siano pressochè moltiplici di un ricambio di esse, e che i ricambj siano fra loro eguali, egli è facile, dico, a concepirsi che avrà luogo anco in questi casi la proposizione esposta: e che non verificandosi queste due condizioni, nella determinazione della spesa di un trasporto mediante quella di un altro trasporto, bisognerà tener conto dei tempi di cui si è parlato sul fine della osservazione seconda.

Osservazione VII. Siccome per determinare la spesa di un dato trasporto di terra qualunque siano le sue qualità e le vie a seguirsi comunemente si accresce o si diminuisce opportunamente il prezzo per ogni unità di peso, o semplicemente il volume, e si ritiene per peso a trasportarsi il peso reale, effettivo, così farò vedere come dai risultamenti che si ottengono con questo metodo si possono cavare quelli che si avranno con quello da noi seguito; e reciprocamente, come dai risultamenti di questo si potranno desumere quelli ai quali conduce il metodo comune.

Qualunque sia la massa di terra a trasportarsi e qualunque siano le vie a seguirsi, sia P il peso reale e P' il fittizio di una unità di volume della stessa massa a trasportarsi; ed s esprima il prezzo che si dovrebbe fissare pel trasporto di ogni unità del peso reale, volendo ritenere questo peso medesimo, ed

s' esprima quello che si dovrebbe stabilire contemplando il peso fittizio.

Evidentemente dovrà essere

$$P \cdot s = P' \cdot s', \text{ ossia } s : s' = P' : P.$$

Vale a dire la spesa pel trasporto di ogni unità di peso reale starà a quella per ogni unità del peso fittizio della terra stessa, come il peso fittizio della stessa unità al suo peso reale; o ciò che è lo stesso, le spese in quistione saranno reciprocamente proporzionali ai pesi della stessa massa di terra contemplati nei due metodi.

L'equazione $Ps = P's'$, ci insegna anco che tutti i rapporti che si avranno considerando i pesi fittizj, avranno anco luogo fra i costi dei trasporti delle unità dei pesi reali; dimodochè se in quelli relativi ai pesi fittizj, si cambieranno i pesi stessi nei costi dei trasporti per ogni unità del peso reale, si avranno altrettanti rapporti analoghi relativi ai prezzi o costi medesimi.

Proposizione seconda. Problema.

Dato il prezzo, g, della giornata all'epoca e luogo nel quale si deve eseguire un trasportamento di terra, e con esso il volume, v, della terra a trasportarsi ed il numero, m, dei ricambj a cui equivale la via a percorrersi coi trasporti; trovare quanto costerà l'intero trasportamento medesimo, cioè la spesa, s, per lo scavare e il caricare la terra sugli strumenti, il trasporto effettivo, e lo scaricare dei medesimi: supposto che siano conosciuti, per due altri trasportamenti di terre simili a quella che si deve trasportare

ed eseguiti con mezzi analoghi, i volumi, v', v'', delle terre trasportate, i tempi, T', T'', impiegati in ciascuno di essi trasportamenti, ed i numeri, m', m'' dei cambj a cui equivalgono rispettivamente le vie percorse nei medesimi due trasportamenti?

Si chiami t' il tempo impiegato nello andiriviene di un intero ricambio, e t'' quello impiegato nello scavare, caricare, e scaricare insieme per ogni unità della medesima terra.

Essendo T', T'', i rispettivi tempi di lavoro impiegati nei trasportamenti dei volumi v', v'', saranno $\frac{T'}{v'}$, $\frac{T''}{v''}$ quei tempi impiegati nei medesimi due trasportamenti per ogni unità delle medesime terre; e però si avranno evidentemente le tre equazioni seguenti

$$\frac{T'}{v'}=m't'+t'',\quad \frac{T''}{v''}=m''t'+t'',\quad s=gv(mt'+t'').$$

Le due prime di queste equazioni somministrano

$$t'=\frac{v'T''-v''T'}{v'v''(m''-m')},\quad t''=\frac{m''v''T'-m'v'T''}{v'v''(m''-m')},$$

valori i quali sostituiti nella terza delle medesime tre equazioni danno

$$s=gv\left\{m\,\frac{v'T''-v''T'}{v'v''(m''-m')}+\frac{m''v''T'-m'v'T''}{v'v''(m''-m')}\right\},$$

ossia

$$s=\frac{gv}{v'v''(m''-m')}\left\{m(v'T''-v''T')+m''v''T'-m'v'T''\right\}$$

per valore cercato della spesa s.

Corollario I. Ponendo

$$\frac{T'}{v'}=\theta'\,,\quad \frac{T''}{v''}=\theta''\,,\quad m''=m'+n$$

si ha visibilmente

$$s=\frac{gv}{n}\left\{(m-m')(\theta''-\theta')+n\theta'\right\},$$

che è la formula usata da alcuni militari nei loro movimenti di terra; giacchè evidentemente le θ', θ'' esprimono quelle parti di una giornata di lavoro che si debbono impiegare per ciascuno strumento nel trasportamento di ogni unità di volume della terra trasportata.

Corollario II. Nominati g', g'' i valori delle rispettive giornate occorrenti pei due trasportamenti suddetti, ed s', s'' le spese fatte per eseguire i medesimi trasportamenti, si avrebbe $\frac{s'}{g'}=T'$, $\frac{s''}{g''}=T''$; e però la spesa in quistione si potrà anco esprimere in quest' altra maniera

$$\frac{gvs's''}{(m''-m')g'g''v'v''}\left\{(m-m')\frac{g'v'}{s'}-(m-m'')\frac{g''v''}{s''}\right\}$$

la quale espressione può riescire in alcuni casi più comoda delle precedenti.

Corollario III. Dividendo per v la spesa qui sopra esposta, si otterrà l' analoga spesa per ogni unità di volume della terra medesima; così dividendo la stessa spesa pel prodotto vg, ovvero quest' ultima trovata pel solo g, si avrà il tempo consumato nello scavare, caricare, trasportare e scaricare una unità di volume della stessa terra.

Osservazione I. Quelle porzioni, dette ricambj, delle vie a percorrersi nei trasporti di terra, in Lombardìa sono omai stabilite di trenta metri ciascuna, quando esse siano orizzontali e di fondi ordinarj; dimodochè uno di questi ricambj consiste in generale in uno andiriviene di sessanta metri, trenta dei quali sono percorsi collo strumento carico e gli altri trenta col medesimo strumento vuoto. Quando poi i ricambj siano porzioni di strade sensibilmente inclinate all' orizzonte e di un fondo ordinario, si ritiene la lunghezza di ciascuno di essi di soli metri venti, ossia ogni ricambio in questo caso consiste in un andiriviene di metri quaranta, venti dei quali sono percorsi collo strumento carico e gli altri venti col semplice strumento vuoto. Egli è però evidente, che bisognerà diminuire od accrescere la lunghezza di uno di questi ultimi ricambj secondo che la inclinazione di esso coll' orizzonte sarà più o meno grande: alcuni pratici ritengono tacitamente il ricambio in rampa di venti metri tutte le volte che la tangente della inclinazione di esso coll' orizzonte non sia minore di un sesto nè maggiore di un quarto; e lo fanno o suppongono giudiziosamente più o meno lungo di venti metri secondo che la tangente della inclinazione medesima sia minore di un sesto o maggiore di un quarto. Quanto sarà benemerito chi stabilirà, mediante una serie di sperienze, la vera relazione fra la inclinazione all' orizzonte di un ricambio colla lunghezza di esso, almeno pei principali strumenti! Questa relazione equivarrà a quella fra il peso effettivo ed il fittizio idoneo.

Osservazione II. Sarebbe sommamente vantaggioso che in ciascuna provincia dove occorrono spesse volte grandi movimenti di terra, si osservassero i valori dei tempi T', T'' rispondenti a dati valori delli v', v'', ed m', m'' per ciascuna specie di quelli strumenti soliti ad usarsi per eseguire i trasporti, i quali sono comunemente barelle, carriuole, gerletti o sportini, barocci tirati da due bovi, o carretti tiratti da un cavallo; giacchè paragonando i valori risultanti della $\frac{s}{gv}$ relativi ai medesimi strumenti, si potrebbe scoprire per ogni trasportamento dato quale degli stessi strumenti converrebbe usare, anzi si potrebbero determinare quei valori d' m, pei quali in ogni caso, convenisse usare l' uno piuttosto che un altro dei medesimi strumenti.

Osservazione III. A scanso di qualunque equivoco stimo bene di dichiarare che per trasportamenti fatti con mezzi simili si intendono quelli nei quali si usano strumenti similmente costruiti e di dimensioni eguali, e di cui i loro carichi ed i ricambj delle vie di trasporto sono anch' essi eguali, più che lo scavare delle terre, il caricare degli strumenti, ed anco lo scaricare si fanno in tutti i medesimi trasportamenti in maniere affatto consimili.

Similmente, e per la stessa ragione, avverto che il g usato nella esposta proposizione esprime ciò che si dovrà dare per ogni giorno di lavoro all' epoca e nel luogo dove si dovrà eseguire il nuovo trasportamento, in compenso di tutte le operazioni a farsi intorno alla terra che si potrà trasportare da un solo strumento inclusivamente al prezzo del consumo di

tutti gli utensili a ciò necessarj non escluso quello dello stesso strumento che si dovrà usare pel trasporto effettivo

Proposizione terza. Problema.

Determinare quanto costerà il trasporto di un numero qualunque di masse di terra, essendo ciascuna di quelle strade che si debbano seguire nel trasporto composta di più tronchi pei quali le circostanze della spesa del trasporto di uno stesso peso reale variano dall' un tronco all' altro; conoscendosi i punti dove sono le masse stesse, e quelli dove si debbono trasportare, come pure le lunghezze di tutti i tronchi delle strade a seguirsi, ed anco le circostanze secondarie dalle quali dipendono le spese dei trasporti parziali?

Si nominino t', t'', t''', ecc. le lunghezze dei successivi tronchi della strada che si dee seguire per trasportare una delle masse date dal luogo ove si trova a quello ove si deve trasferire; più si nomino p', p'', p''', ecc. i pesi reali o fittizi che si debbono valutare per calcolare le spese dei trasporti della stessa massa reale lungo i tronchi medesimi t', t'', t''', ecc. determinati avendo riguardo a tutte le circostanze, che hanno influenza sul costo dei medesimi trasporti.

Egli è per sè stesso evidente, che la spesa totale pel trasporto di questa massa sarà eguale a $t' p' + t'' p'' + t''' p''' +$ ecc. Quindi, facendo per ogni massa reale a trasportarsi ciò, che si è fatto per l' anzi considerata, ed unendo le espressioni ana-

loghe alla $t' p' + t'' p'' + t''' p''' +$ ecc. si otterrà la spesa totale richiesta.

Proposizione quarta. Problema.

Determinare quanto costerà il trasporto in A (fig. 30) di tutta la terra presa uniformemente fino ad una profondità eguale alla unità, da tutta la superficie del rettangolo $ABCD$, le misure de' lati, cioè degli AB, BC essendo due numeri interi?

Si tiri la AG, che divida pel mezzo l'angolo BAD; si facciano le parti Ae, ef, fg, gh, ecc., Aa, ab, bc, ecc. tutte eguali alla unità; e si tirino le $e1$, $f2$, $g3$, ecc. parallele alla AB; e le $a6$, $b7$, $c8$, ecc. parallele alla AD; e risulterà il rettangolò $ABCD$ diviso in più quadratelli aventi ciascuno l'unità per lato.

Per evitare la confusione si supponga, che il trasportamento delle parti delle masse di terra sottoposte ai quadratelli qui descritti si eseguisca, trasportando primieramente le parti più lontane da A, e poi le più lontane fra quelle rimaste, e così si continui sino al trasportamento delle r, s che debbono essere le ultime. Così, per lo stesso motivo, si supponga, che il numero degli uomini destinato al trasporto non sia eccessivo, affinchè si possa evitare la confusione, e nello stesso tempo siano libere le vie di trasporto, ciascuna delle quali dovrà essere, come è ben naturale, una retta avente un termine in A, e l'altro nel punto ove sarà preparato lo strumento carico per essere trasportato.

Similmente, per evitare pure la confusione, e nello stesso tempo seguire ciò che si fa comunemente in pratica nei trasporti analoghi a quello di cui si parla, supponiamo, che l'operajo trasportante trovi la terra sottoposta a ciascun dei quadratelli in cui si è diviso il rettangolo $ABCD$ caricata già sul rispettivo strumento posto nel punto di mezzo di uno di quei lati di esso quadratello, che sono prossimi al punto A e nello stesso tempo alla retta AG più degli altri due; per esempio, per le masse di terra corrispondenti ai quadratelli E, F le trovi poste sui suoi strumenti collocati rispettivamevte in n pel primo ed in m pel secondo, punti di mezzo dei lati tv, xy.

Ammesse le cose dichiarate qui sopra, la strada di trasporto per la terra corrispondente al quadratello E risulterà $\sqrt{4^2+(2\frac{1}{2})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{89}$, e per quella che corrisponde all' F eguale a $\sqrt{(1\frac{1}{2})^2+3^2} = \frac{1}{2}\sqrt{45}$; ed in generale la lunghezza della via di trasporto per quello fra i detti quadratelli, che è comune all'$x$esimo dei rettangoletti $A1$, $e2$, $f3$, ecc. ed all'$y$esimo degli Ab, $a7$, $b8$, ecc. risulterà $\sqrt{(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2}$, se sarà nell'angolo GAD, ovvero $\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2}$ se troverassi nell' angolo GAB; ovvero o l'una o l'altra indifferentemente, se il quadratello sarà fra quelli che sono attraversati dalla stessa retta AG.

Per tanto, la somma delle strade di trasporto per tutte le masse di terra corrispondenti a tutti i quadratelli contenuti nel rettangolo avente il lato secondo AD eguale ad x, e l'altro quello cioè secondo AB eguale ad y, eguaglierà la somma dei numeri.

$\sqrt{[(\frac{1}{2})^2]}$, $\sqrt{[1+(\frac{1}{2})^2]}$, $\sqrt{[2^2+(\frac{1}{2})^2]}$, $\sqrt{[3^2+(\frac{1}{2})^2]} \ldots \sqrt{[(x-1)^2+(\frac{1}{2})^2]}$

$\sqrt{[(\frac{1}{2})^2+1]}$, $\sqrt{[1+(1\frac{1}{2})^2]}$, $\sqrt{[2^2+(1\frac{1}{2})^2]}$, $\sqrt{[3^2+(1\frac{1}{2})^2]} \ldots \sqrt{[(x-1)^2+(1\frac{1}{2})^2]}$

$\sqrt{[(\frac{1}{2})^2+2^2]}$, $\sqrt{[(1\frac{1}{2})^2+2^2]}$, $\sqrt{[2^2+(2\frac{1}{2})^2]}$, $\sqrt{[3^2+(2\frac{1}{2})^2]} \ldots \sqrt{[(x-1)^2+(2\frac{1}{2})^2]}$

$\sqrt{[(\frac{1}{2})^2+3^2]}$, $\sqrt{[(1\frac{1}{2})^2+3^2]}$, $\sqrt{[(2\frac{1}{2})^2+3^2]}$, $\sqrt{[3^2+(2\frac{1}{2})^2]} \ldots \sqrt{[(x-1)^2+(3\frac{1}{2})^2]}$

.
.
.

$\sqrt{[(\frac{1}{2})^2+(x-1)^2]}$, $\sqrt{[(1\frac{1}{2})^2+(x-1)^2]}$, $\sqrt{[(2\frac{1}{2})^2+(x-1)^2]}$, $\sqrt{[(3\frac{1}{2})^2+(x-1)^2]} \ldots \sqrt{[(x-\frac{1}{2})^2+(x-1)^2]}$

$\sqrt{[(\frac{1}{2})^2+x^2]}$, $\sqrt{[(1\frac{1}{2})^2+x^2]}$, $\sqrt{[(2\frac{1}{2})^2+x^2]}$, $\sqrt{[(3\frac{1}{2})^2+x^2]} \ldots \sqrt{[(x-\frac{1}{2})^2+x^2]}$

$\sqrt{[(\frac{1}{2})^2+(x+1)^2]}$, $\sqrt{[(1\frac{1}{2})^2+(x+1)]}$, $\sqrt{[(2\frac{1}{2})^2+(x+1)^2]}$, $\sqrt{[(3\frac{1}{2})^2+(x+1)^2]} \ldots \sqrt{[(x-\frac{1}{2})^2+(x+1)^2]}$

.
.
.

$\sqrt{[(\frac{1}{2})^2+(y-1)^2]}$, $\sqrt{[(1\frac{1}{2})^2+(y-1)^2]}$. $\sqrt{[(2\frac{1}{2})^2+(y-1)^2]}$. $\sqrt{[(3\frac{1}{2})^2+(y-1)^2]} \ldots \sqrt{[(x-\frac{1}{2})^2+(y-1)^2]}$

Per semplicità indicheremo la somma di tutte queste strade col simbolo (x, y).

Ora nella Tavola

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ... x
1	0,50	1,62	3,68	6,72	10,75	15,78	21,80	28,81	36,82	45,83
2	1,62	4,54	9,10	15,49	23,79	34,03	46,23	60,41	76,56	94,69
3	3,68	9,10	16,86	27,15	40,17	56,00	74,70	96,3	120,84	148,31
4	6,72	15,49	27,15	42,05	60.38	82,31	107,95	137,38	170,64	207,76
5	10,75	23,79	40,17	60,38	84,73	113,39	146.53	184,28	226,72	273,90
6	15,78	34,03	56,00	82.31	113,39	149,48	190,76	237.41	289,56	347,29
7	21,80	46,23	74,70	107,95	146,53	190,76	240,88	297,08	359,53	428,36
8	28,81	60,41	96,31	137,38	184,28	237,41	297.08	363,54	436.96	517,50
9	36,82	76 56	120,84	170,64	226,72	289,56	359,53	436,96	522,05	614,97
10	45,83	94,69	148,31	207,76	273,90	347,29	428,36	517,50	614,97	720,97
⋮										
y										

Vi sono i primi cento termini, ciascuno espresso con un solo numero.

Ora nella tavola qui annessa vi sono i primi cento termini, ciascuno espresso con un solo numero, della serie doppia, che ha per termine generale (x, y); e però con essa si potrà avere con grandissima facilità il valore di (AD, AB), che è la somma cercata; sempre che AD, AB non siano maggiori di 10 metri, per esempio, se tale è l' unità di misura lineare, ciò che comprende pressochè tutti i casi più comuni. Quindi, la spesa dimandata nella proposta proposizione sarà eguale al prodotto della unità s nella somma (AD, AB), che ora è conosciuta.

Esempio. Se fosse $AD = 7$, ed $AB = 6$, si avrebbe $(AD, AB) = (7, 6) = 190, 76$; e però la spesa del trasporto risulterebbe eguale a $(190, 76)$ volte la s.

Osservazione I. Se la profondità della terra sottoposta al rettangolo $ABCD$ fosse o minore ovvero maggiore della unità, ammesso sempre gli strumenti preparati al trasporto dove si è detto sopra, e caricati da uomini destinati particolarmente a tal uopo, si otterrebbe la spesa del trasporto moltiplicando quella stessa trovata superiormente per l' altezza nuova misurata colla stessa unità fissata per l' altezza suddetta. Cosicchè, qualunque sia l' altezza della terra, converrà calcolare la spesa del trasporto, come se essa fosse alta una unità, e poscia desumere da questa la spesa cercata.

Gli strumenti poi da caricarvi le terre si pongono nei punti di mezzo dei lati tv, yx anzi che nel mezzo degli altri lati dei medesimi quadratelli, per la ragione che essi sono più vicini al punto che non questi: siccome è facilissimo a riconoscersi.

Proposizione quinta. PROBLEMA.

Quanto costerà il trasporto in A della terra sottoposta al rettangolo $ABCD$ (fig. 31, 32) di cui la misura di un solo dei lati concorrenti in A è intera?

Sia (fig. 31) $AB = a$, ed $AD = b + b'$; ovvero (fig. 32) $AB = a + a'$, ed $AD = b$: dove a, b esprimano due numeri interi, ad a', b' due frazioni.

Incomincio dal primo caso. Si trovino i valori delle somme (a, b), $(a, b+1)$ mediante la proposizione precedente; indi trovisi il quarto numero proporzione dopo 1, $(ab+1) - (a, b)$, ed il b'; e questo si unisca alla somma (a, b), e si avrà

$$(a, b) \cdot (1 - b') + (a, b + 1) \cdot b'$$

per somma delle strade necessarie pel trasporto in A della terra distribuita sul rettangolo $ABCD$.

Così nell' altro caso, relativo alla figura trentaduesima, si troverà la somma delle strade di trasporto espressa da $(a, b) \cdot (1 - a') + (a + 1, b) \cdot a'$.

Quindi nei prodotti che si avranno moltiplicando queste somme per la s unità conosciuta delle spese, si avranno le spese richieste in ambedue i casi della proposta proposizione.

Proposizione sesta. PROBLEMA.

Quanto costerà il trasportamento in A della terra sparsa uniformemente sotto il rettangolo $ABCD$ (fig. 33), come nelle precedenti proposizioni, essendo qui le misure di AD, ed AB ambedue frazionarie?

Si faccia $AD = a + a'$, ed $AB = b + b'$: ritenuto che a, b esprimono due numeri interi, ed a', b' due frazioni; come nella proposizione precedente.

Si trovino (a, b), $(a+1, b)$, $(a, b+1)$; e poscia il quarto termine geometricamente proporzionale dopo i tre 1, $(a+1, b) - (a, b)$, ed a'; e quello, quarto proporzionale dopo i tre 1, $(a, b+1) - (a, b)$, ed il b'; e questi due quarti proporzionali si uniscano alla somma (a, b) e si otterrà

$(a, b)(1 - a' - b') + a'(a+1, b) + b'(a, b+1)$: quantità, che indica la somma delle strade a percorrersi per eseguire il trasporto in A della terra sparsa sulla figura $ABGHFD$, la quale somma si potrà prendere per la somma delle strade necessarie al trasportamento di tutta la terra sparsa sul rettangolo $ABCD$, quando $HGCF$ sia trascurabile in confronto del resto $ABGHFD$.

Volendo anco la somma delle vie di trasporto per la massa di terra sottoposta al rettangoletto $HGCF$, qualunque siano le sue dimensioni, si formerà la quantità

$(a+1, b+1) - (a+1, b) - (a, b+1) + (a, b)$;
e poscia si troverà il quarto termine geometricamente proporzionale dopo

1, $(a+1, b+1) - (a+1, b) - (a, b+1) + (a, b)$,
ed il prodotto $a'b'$; e questo sarà la somma cercata delle strade a percorrersi pel trasporto della massa di terra corrispondente al rettangoletto $GHFC$.

Riunendo quest'ultimo quarto termine alla somma delle strade di trasporto della terra sottoposta alla figura $ABGHFD$, e moltiplicando la somma risultante per la spesa unitaria s, si otterrà la spesa richiesta nella proposizione proposta.

Proposizione settima. Problema.

Determinare quanto costerà il trasporto della terra sparsa uniformemente nel rettangolo $ABCD$ (fig. 34) qualsivoglia, il punto ove si debbe trasportarla essendo o l'M, ovvero l'M', oppure l'M''?

Premieramente, il punto nel quale si debbe trasportare la terra sia l'M dentro lo stesso rettangolo od in uno dei suoi lati. Si trovino, colle precedenti proposizioni, le spese dei trasporti in M delle terre sparse sui rettangoli $MbCc$, $McDd$, $MdAa$, $MaBb$, nei quali si divide il rettangolo $ABCD$ dalle rette aMc, dMb parallele ai lati del medesimo; e nella somma di queste quattro spese, si avrà la richiesta per questo caso.

In secondo luogo, il punto ove si debbe raccogliere la massa di terra sia l'M', situato fuori del rettangolo, ma compreso fra i prolungamenti di due suoi lati paralleli, od anco in uno di questi due prolungamenti. Si tirino le $fM'e$, $M'db$ parallele rispettivamente ai lati AD, DC fra i prolungamenti dei quali trovasi il punto M'; e si prolunghino questi due lati sino in f ed in e: fatto ciò, si trovino le spese necessarie per trasportare in M' le masse di terra corrispondenti ai rettangoli $fBbM'$, $bceM'$, $fAdM'$, $dDeM'$, e dalla somma delle prime due di queste spese si levi quella delle altre due; e si otterrà la spesa richiesta pel caso presente.

In terzo ed ultimo luogo, il punto dove si deve trasferire la terra sia l'M'', situato tra i prolunga-

menti dei lati di uno degli angoli del rettangolo $ABCD$. In questo caso, si tirino le $M''h$, $M''e$ parallele rispettivamente alle BA, AD, e si prolunghino i lati CB, DA, BA, CD rispettivamente sino ai punti h, g, f, ed e; indi si trovino le spese dei trasporti in M'' delle terre corrispondenti ai quattro rettangoli $M''eCh$, $M''fAg$, $M''fBh$, $M''eDg$; e della somma di siffatte spese relative ai rettangoli $M''eCh$, $M''fAg$ si levi la somma di quelle relative ai trasporti delle terre situate sui rettangoli $M''fBh$, $M''eDg$; che nella differenza risultante si avrà evidentemente la spesa dimandata.

Osservazione I. Non è necessario che la terra sparsa sotto la figura $hBADeM''$ abbia effettivamente una profondità eguale a quella, che si vuole trasportare, neppure che sia allo stesso livello, come si è tacitamente supposto qui sopra; solo è necessario, che la variazione delle sue altezze da un punto all' altro non apporti grandi variazioni nella fatica per le vie dei differenti trasporti.

Osservazione II. Se poi la terra sottoposta al rettangolo $ABCD$ non avesse l' altezza eguale ad uno, converrebbe nel computo della spesa di trasporto supporlo effettivamente eguale ad uno; e poi procedere alla determinazione della vera spesa, come nella osservazione prima della proposizione terza.

Anzi, se la terra a trasportarsi e sparsa nel rettangolo $ABCD$ non avesse dovunque la stessa altezza, si potrebbe dividere il medesimo rettangolo in più rettangoli per modo, che in ciascuno di questi si potesse supporre costante questa altezza; e poi trovare le spese pei trasporti parziali relativi alle

terre sottoposte a questi rettangoli; che nella somma di esse si avrebbe la cercata.

Osservazione III. Le ultime proposizioni qui esposte ed alcune delle seguenti, relative al trasportamento delle terre, si possono sciogliere anco graficamente; onde dichiarare quest' altro metodo, tratterò l' ultimo dei tre casi contemplati qui sopra. Vale a dire si debba stimare la spesa pel trasportamento in M (fig. 35) della terra sparsa, come più volte si è detto nello spazio $ABCD$.

Si faccia l'effettivo disegno del rettangolo $ABCD$ a cui trovasi sottoposta la terra da trasportarsi, e si segni in esso anco la posizione vera del luogo M, dove si deve trasportare la terra; indi si seghino le parti AE, EF, FG, GN, NH, HP, ed anco le AI, IK, KL, LQ eguali alla unità lineare, e tirinsi le rette Ee, Fd, Gc,... parallele alla AB, e le If, Kg,... alla AD; indi si determinino quei punti sì dei lati dei quadratelli 1, 2, 3, 4, ecc., che dei rettangoletti 5, 6,... 7, 8 nei quali converrà porre gli strumenti a caricarsi delle terre rispettivamente sottoposte ai medesimi. Fatto questo, si portino in una stessa retta, e di seguito l'una all' altra tutte le vie di trasporto pei quadratelli; e con ciò si abbia la retta terminata $\alpha\beta$: questa retta indicherà la lunghezza della strada a percorrersi per trasportare in M, la terra sottoposta o corrispondente al rettangolo $APRQ$.

Per trovare la lunghezza della via di trasporto per le altre figure in cui è diviso la $QRPDCB$, per esempio quella pel rettangolo $abcd$, supposto m il punto nel quale convenga porre lo strumento a ca-

13

ricarsi della terra sottoposta ad esso, si farà la retta $\theta\delta$ eguale alla mM, si segherà di essa una sua parte $\theta\mu$ che sia alla stessa $\theta\delta$ come l' area del rettangoletto $abcd$ è a quella del quadratello avente per lato ab, oppure semplicemente come la retta ad alla stessa ab: si ripeterà una simile operazione per tutte le analoghe figure, che compongono la $QRPDCB$, si porranno l' una dopo l' altra tutte le rette così determinate insieme alla via pel trasporto della terra, corrispondente al rettangoletto CR, facilmente determinabile, e si otterrà una retta terminata rs, che rappresenterà la somma delle vie di trasporto per la terra sottoposta alla stessa figura $QRPDCB$.

Finalmente si misureranno, col modulo del disegno, le due rette $\alpha\beta$, rs così fatte, e si avrà un numero, che moltiplicato per la nota spesa s unitaria darà la spesa qui cercata.

Proposizione ottava. Problema.

Quanto costerà il trasportare in un dato punto la terra situata in uno spazio racchiuso da un contorno dato, ed avente una altezza eguale alla solita unità lineare?

Si inscrivano o si circoscrivano uno o più rettangoli alla figura data, ovvero alcuni si iuscrivano ed altri si circoscrivano, in somma si costituiscano uno o più rettangoli la cui somma non differisca molto dall' area della figura data; e poi si dividano quegli spazi, che costituiscouo questa differenza in più parti, ciascuna delle quali differisca dalla unità superficiale meno che sia possibile ed abbia il con-

torno piuttosto raccolto, od almeno che abbia quest' ultima proprietà. Ciò preparato, si faccia la proporzione geometrica, come il metro quadrato sta all' area di una di queste ultime porzioni, così la distanza fra quel punto del contorno di essa nel quale converrà caricare la rispettiva terra sullo strumento destinato pel trasporto, od una altra retta a determinarsi; e la nuova retta, così trovata, indicherà la strada di trasporto per la terra racchiusa in questa medesima porzione. Indi facciasi altrettanto per qualunque altra delle figure analoghe in cui si sarà divisa la detta differenza; e così si avranno tutte le vie di trasporto per le masse di terra corrispondenti a siffatte figure, come si avranno quelle relative alle masse corrispondenti ai rettangoli inscritti o circoscritti, usando dei metodi superiormente esposti.

Finalmente, si combinino le vie di trasporto relative alle dette porzioni e quelle relative agli anzidetti rettangoli come si dovrebbero combinare queste figure per avere lo spazio in cui è sparsa la terra a trasportarsi, e con ciò si otterrà quella sola retta, la cui misura moltiplicata per la solita unità s, darà di prodotto la spesa richiesta nella proposta proposizione.

Osservazione I. Se la terra a trasportarsi non avesse dovunque la medesima profondità, o fosse di più specie, o di una sola specie ma differente di quella con un cui trasporto si è determinata s, converrebbe dividere tutta la figura a cui trovasi sottoposta la terra stessa in figure eguali o poco differenti in area da una unità quadrata, ed anco raccolte; e costituire per ciascuna delle masse di terra sottoposte a queste figure o porzioni integranti la

data, la proporzione geometrica seguente: come sta l' unità di peso, p, al peso reale o fittizio di essa porzione, così la distanza fra quel punto del contorno di essa figura in cui converrà porre lo strumento destinato ad essere caricato colla terra corrispondente, ad un'altra retta a determinarsi, la quale indicherà la lunghezza della via di trasporto per la terra corrispondente alla medesima porzione: e fatta una simile operazione per tutte le parti in cui è stata divisa la massa a trasportarsi, bisognerebbe unire l' una dopo l' altra e per diritto tutte le rette così trovate; e finalmente formare il prodotto della misura della retta risultante da tale unione per la salita spesa s, e questa sarebbe la spesa cercata pel caso di cui si tratta.

Osservazione II. Se le masse di terra considerate nelle precedenti proposizioni, si dovessero trasportare dal punto dove si sono già traslocate in altro, e da questo in un terzo, ecc. le spese per questi altri successivi trasportamenti si potrebbero trovare colle cose esposte nelle nozioni generali.

Proposizione nona. Problema.

Si debbano trasportare più masse di terra da dove sono in altri luoghi dati o no di posizione, facendo percorrere a ciascuna di esse una strada di uno o di due o più tronchi, non individuati, ma aventi certe proprietà conosciute; per es., che l' unione dei due primi tronchi di una di essa debba essere in una linea data, il secondo tronco perpendicolare ad una linea pure data ecc: si dimanda qual sistema di esse strade, che converrà seguire onde la spesa totale del trasportamento riesca la minima.

Nomininsi p, p', p'', ecc. i tronchi successivi di una qualunque di quelle strade cercate, che si potranno percorrere per eseguire il trasportamento di una delle date masse di terra a traslocarsi; e P, P', P'', ecc. i rispettivi pesi, reali, o fittizj di questa medesima massa, quando essa percorre gli stessi tronchi di strada; cioè P quel peso di essa, che si deve computare, onde valutare il suo trasporto lungo il tronco di strada p, P' quello pel secondo tronco p', ecc. Così intendasi colle q, q', q'', ecc. Q, Q', Q'', ecc. per una seconda massa, ciò che rappresentano p, p', p'', ecc. P, P', P'', ecc. per l'anzidetta, ecc. ecc. Finalmente s'indichi colla S tutta la spesa necessaria per eseguire il trasportamento di cui si parla, seguendo le strade composte dai tronchi p, p', p'', ecc. q, q', q'', ecc. ecc.

La spesa totale per il trasportamento dei pesi P, P', P'', ecc. Q, Q', Q'', ecc. ecc. lungo le strade anzidette sarà espressa, per la proposizione seconda, da

$$s\,(Pp+P'p'+P''p''+\text{ecc.}+Qq+Q'q'+Q''q''+\text{ec.}+\text{ec.});$$

e però il suo differenziale

$$dS = s\left\{\begin{array}{l} P\,dp+P'\,dp'+P''\,dp''+\text{ecc.} \\ +Q\,dq+Q'\,dq'+Q''\,dq''+\text{ecc.}+\text{ecc.} \\ p\,dP+p'\,dP'+p''\,dP''+\text{ecc.} \\ +q\,dQ+q'\,dQ'+q''\,dQ''+\text{ecc.}+\text{ecc.} \end{array}\right\}$$

Ma affinchè la spesa sia minima dev'essere $dS=0$; adunque pel sistema cercato di trasporto avrà luogo l'equazione

$$\begin{array}{l} P\,dp+P'\,dp'+P''\,dp''+\text{ecc.} \\ +Q\,dq+Q'\,dq'+Q''\,dq''+\text{ecc.}+\text{ecc.} \\ p\,dP+p'\,dP'+p''\,dP''+\text{ecc.} \\ +q\,dQ+q'\,dQ'+q''\,dQ''+\text{ecc.}+\text{ecc.}=0. \end{array}$$

Questa equazione combinata con tutte quelle, che esprimeranno le proprietà o condizioni conosciute dei differenti tronchi delle strade, che si possono seguire nel trasportamento, somministrerà il sistema cercato, cioè quel sistema di strade seguendo il quale la spesa del trasportamento riescirà la minima.

La combinazione di quest' ultima equazione con quelle, che esprimono le proprietà dei tronchi delle strade, si farà precisamente, come si combinano in Meccanica le equazioni esprimenti le condizioni di un sistema colla ammirabile equazione somministrata dalla scrittura algebraica del principio delle velocità virtuali, allorchè si cerca la posizione di equilibrio del medesimo sistema.

Corollario. Se i pesi fittizj o reali P, P', P'', ecc. Q, Q', Q'', ecc., ecc. non variassero variando le posizioni de' rispettivi tronchi di strada p, p', p'', ecc. q, q', q'', ecc., ecc. l' equazione, che converrebbe combinare con quelle esprimenti le condizioni anzidette, sarebbe la seguente

$$Pdp + P'dp' + P''dp'' + \text{ecc.}$$
$$+ Qdq + Q'dq' + Q''dq'' + \text{ecc.} = 0.$$

Per questo caso della proposizione esposta, il quale si incontra spessissime volte, hanno luogo varie singolarità, che si trovano esposte qui sotto.

Osservazione I. Se coi pesi P, P', P'', ec. Q, Q', Q''ec. costanti, i quali saranno gli effettivi od i fittizj delle masse a trasportarsi, si esprimessero le grandezze d i altrettante forze dirette secondo i rispettivi tronchi di strade p, p', p'', ecc. q, q', q'', ecc. ecc. da essi percorsi, e tendenti a diminuirli, l' equazione trovata qui sopra, cioè la

$$P\,dp + P'\,dp' + P''\,dp'' + \text{ecc.}$$
$$+ Q\,dq + Q'\,dq' + Q''\,dq'' + \text{ecc.} + \text{ecc.} = 0.$$

si insegna, che esse forze si farebbero fra loro equilibrio: proprietà veramente singolare ed a questo proposito utilissima; giacchè in forza di essa si potranno usare per isciogliere le differenti quistioni relative al trasportamento delle terre ed analoghe alla quistione presente, tutti quei mezzi o cognizioni che si userebbero per trovare la posizione di equilibrio dell' ideato sistema di forze fittizie. Vale a dire, la stessa proposizione auzi esposta, nel caso che i pesi P, P', ecc., Q, Q', ecc., ecc. sian costanti si potrà trattare precisamente, come la seguente di statica.

Qual posizione debbono avere i tronchi delle strade a seguirsi nel trasportamento di cui si parla, perchè dirigendo secondo essi delle forze fittizie in grandezza eguali rispettivamente ai pesi delle terre da cui sono essi percorsi, e tendenti a diminuirli, si facciano fra loro equilibrio?

Esempio primo. Si debbono radunare in un solo luogo i tre pesi P, Q, R situati nei punti dati A, B, C (fig. 36); si chiede dove converrà fare questo radunamento, perchè la spesa del trasporto riesca la minima, potendosi appoggiare le spese dei singoli trasporti agli stessi pesi reali P, Q, ed R?

Si faccia il triangolo DEF, che abbia i lati rispettivamente proporzionali ai pesi P, Q, R, cioè tale che stia $EF : P = DF : Q = DE : R$;
indi si descriva il segmento circolare AMC capace

dell' angolo AMC supplimento dell' angolo E, ed il CMB capace dell' angolo CMB supplimento del D; ed M segamento o punto comune agli archi fatti AMC, CMB sarà il luogo cercato, cioè dove radunando i tre pesi P, Q, R stessi, la spesa del trasporto risulterà la minima.

Essendo per costruzione $EF: P = DF: Q = DE: R$, e per la trigonometria
sen $D : EF =$ sen $E : DF =$ sen $F : DE$, si avrà sen $D : P =$ sen $E : Q =$ sen $F : R$. Ma pure per costruzione si ha sen $D =$ sen CMB, sen $E =$ sen AMC; e però sen $F =$ sen AMB; adunque sarà anco

$$P : \text{sen } CMB = Q : \text{sen } AMC = R : \text{sen } AMB.$$

Quindi applicando in M delle forze, che abbiano le direzioni delle rette AM, MB, MC e siano rispettivamente eguali ai pesi P, Q, R, si faranno esse equilibrio; e conseguentemente, per la proposizione dimostrata sopra, il punto M sarà il cercato.

Corollario. La spesa del trasportamento dei pesi P, Q, R dai punti A, B, C nell' M, qui determinato, sarà evidentemente eguale ad s moltiplicata per

$$AM \cdot P + BM \cdot Q + CM \cdot R.$$

In generale, se si dovessero radunare in un solo luogo più masse di cui si conoscessero i rispettivi pesi effettivi o fittizj e le loro posizioni; il punto nel quale converrebbe radunarle, perchè la spesa totale del trasporto fosse la minima, sarebbe quello, al quale applicando delle forze dirette ai punti ove sono collocati i pesi, e proporzionali rispettivamente ai pesi medesimi si farebbero equilibrio.

Da quest' ultimo risultamento discende, che, se si volesse ammucchiare in un solo luogo lo strato di

uniforme altezza della terra sparsa sulla superficie di un campo parallelogrammico e molto più rettangolare, per ispendere meno nel trasportamento di essa, converrebbe costituire il mucchio nel punto ove si incontrano le diagonali del rettangolo medesimo.

Quando i punti, dove sono le masse a radunarsi, e quello della loro unione, saranno effettivamente in una campagna cioè sul terreno, auco nel caso di tre soli, difficilmente si potrà determinare la posizione di questo punto col descrivere i due archi sopra usati: e per tanto, quando essi siano tre, utile all' occorrenza potrà essere il seguente metodo trigonometrico.

Si determinino gli angoli E, F del triangolo DEF mediante i pesi P, Q, R; indi si determinino gli angoli ACM, ABM coll' ajuto delle due equazioni

$$ACM + ABM = E + F - BAC,$$

$$\tan\tfrac{1}{2}(ACM - ABM) = \frac{AB \cdot Q - AC \cdot R}{AB \cdot Q + AC \cdot R} \tan\tfrac{1}{2}(ACM + ABM)$$

facilmente dimostrabili; e si tirino le rette BM, cM, che facciano colle BA, CA rispettivamente gli angoli ACM, ABM, così determinati; e nel punto comune a queste due rette si avrà il luogo richiesto, M.

Esempio secondo. In qual punto della sponda rettilinea LN (fig. 37) di un canale si debbano radunare i pesi P, Q, R, ecc. situati rispettivamente in A, B, C, ec., perchè la spesa del trasporto di essi riesca la minima?

Il punto cercato sia indicato dall' M. Si uniscano le rette AM, BM, CM, eec. Il punto M dovrà essere talmente situato, che sia soddisfatta l'equazione

$$P \cos AML + Q \cos BML + R \cos CML + \text{ecc.} = 0.$$

Se la sponda del canale in un punto della quale si debbono radunare i pesi fosse curvilinea, il punto dove converrebbe radunare i pesi, affinchè la spesa del trasporto di essi risultasse la minima, si determinerebbe pure colle stesse regole colle quali si troverebbe la posizione di equilibrio di un punto obbligato in essa linea ed animato da forze eguali ai pesi a trasportarsi e dirette ai punti ove questi sono collocati.

Esempio terzo. Dovendosi trasportare nel punto B (fig. 38) il peso P situato in A, e per eseguire il trasportamento attraversare il canale CG avente le sponde CD, FG parallele; si chiede qual via $ALHB$ si dovrà seguire, perchè la spesa del trasporto riesca la minima, volendo il passaggio sul canale perpendicolare alle sue sponde?

Supposto, che ai punti L ed H vi siano applicate due forze dirette; la prima al punto A, e la seconda al B, ed entrambi eguali al peso P; e che la LH esprima un filo la cui tensione sia perpendicolare alle sponde del canale, egli è d'uopo, per l'equilibrio che le LA, HB siano fra loro parallele. Quindi, se dal punto B si tirerà la BE in direzione perpendicolare alla FG ed eguale alla larghezza del canale, e si unirà il suo termine E al punto A, e dal punto L dove quest' ultima retta sega la sponda CD si tirerà la LH perpendicolare alle sponde del canale, indi si congiungerà la retta HB; la linea spezzata $ALHB$ indicherà, anzi sarà le via cercata.

Se più pesi P,Q,R, ecc. situati nei punti A,B,C, ec. (fig. 39) si dovessero trasportare nel medesimo punto M al di là del canale EG avente le sponde presso

a poco fra loro parallele col radunarle primieramente in uno stesso punto L della sponda EN, e da questo punto trasferirli per una stessa strada in M, e che il passaggio del canale dovesse essere qui pure perpendicolare alle sue sponde, la posizione di questo medesimo punto L dovrebbe soddisfare l' equazione $P \cos ALE + Q \cos BLE + R \cos CLE +$ ecc. $+ (P + Q + R +$ ecc.$) \cos MHF = 0$ siccome facilmente si può dimostrare.

Così, se per trasportare un peso P da un punto dato A od un altro M (fig. 39) si dovessero attraversare più canali aventi ciascuno le sue due sponde rettilinee parallele, e che i passaggi dovessero essere perpendicolari ai canali stessi, come generalmente si richiede in tali casi, facilissimamente si determinerebbe l' effettiva strada a seguirsi in questo trasporto, perchè la spesa risultasse la minima. È singolare, che tutti quei tronchi della strada a seguirsi, che sono sul terreno, debbono essere fra loro paralleli.

In fine, se per eseguire il trasporto si dovesse passare un canale mediante un ponte volante ordinario, onde trovare la strada pel trasporto della minima spesa, bisognerebbe ricorrere alla teorica dei pendoli pei quali sono date le corde che debbono sottendere gli archi descritti da essi, e si cercano le loro lunghezze, non che i punti di sospensione, perchè facciano nel minimo tempo le loro intere oscillazioni.

Osservazione II. Se fosse cognita la spesa fatta per eseguire un certo trasporto, e si volessero determinare le strade percorse nell' eseguirlo, di cui si conoscessero solamente certe proprietà non sufficienti

per determinarle immediatamente, bisognerebbe combinare quell' equazione, che si avrebbe eguagliando il prodotto

$$s\,(Pp+P'p'+P''p''+\text{ec.}+Qq+Q'q'+Q''q''+\text{ec.}+\text{ec.})$$

alla spesa data, con quelle equazioni, che esprimessero le proprietà dei tronchi delle strade, come sopra si è detto di combinare con queste ultime medesime equazioni o colle loro differenziali la

$$\left.\begin{array}{l} P\,dp+P'\,dp'+P''\,dp''+\text{ecc.} \\ +\,Q\,dq+Q'\,dq'+Q''\,dq''+\text{ecc.}+\text{ecc.} \\ p\,dP+p'\,dP'+p''\,dP''+\text{ecc.} \\ +\,q\,dQ+q'\,dQ'+q''\,dQ''+\text{ecc.}+\text{ecc.} \end{array}\right\}=0,$$

onde determinare il sistema di strade più economico pel trasportamento.

Osservazione III. Se i tronchi delle strade a percorrersi o percorse dalle masse di terra fossero curvilinei, e ciascun tronco p, p', p'', ecc. q, q', q'' ec. ec. non situato per intero nello stesso piano, o che per altre circostanze variasse da un punto all' altro di essi tronchi la fatica pel trasportamento di esse masse; i pesi fittizj sarebbero in generale variabili e funzioni delle coordinate dei punti delle vie percorse: ciò non ostante, l' analogía osservata fra la quistione di Meccanica relativa all' equilibrio del sistema di forze fittizie di cui si è parlato sopra, e quella rispetto al trasporto ed esposta nella penultima osservazione, non cesserebbe di sussistere, come facilmente si può dimostrare combinando ciò che disse il celebre G. Monge nel tomo dell' anno 1781 dell' Accademia delle scienze

di Parigi con quello che si trova alla fine della quarta sezione della 2.ª edizione della Meccanica Analitica di Lagrange. Anzi ha luogo anco una singolare analogia tra la stessa proposizione generale relativa al trasporto ed una notissima di Meccanica, che trovasi nella medesima quarta sezione della Meccanica di Lagrange.

Osservazione IV. La regola esposta per soddisfare il caso contemplato nel corollario della proposta proposizione, ed in particolare per determinare quel punto nel quale si debbono radunare più pesi dati di grandezza e di posizione, affinchè la spesa del trasporto sia minore di quella, che si farebbe radunando i pesi stessi in un altro punto qualunque, non è buona tutte le volte, che le forze fittizie di cui si è parlato superiormente, non si possono fare equilibrio; e siccome ciò accade quasi sempre, quando i pesi a trasportarsi siano situati in una stessa retta, e si vogliono radunare in un punto solo di essa; per questo credo bene, onde menomare questo suo difetto, di esporre anco la seguente

Proposizione decima. Problema.

Più pesi conosciuti e situati in punti dati di una medesima retta si debbono radunare in uno stesso punto di essa; si dimanda dove converrà fare questo radunamento, perchè la spesa del trasporto di essi pesi riesca la minima?

I pesi che si debbono radunare siano espressi ordinatamente da

$p', p'', p''', \ldots p^{(m-1)}, p^{(m)}, p^{(m+1)}, \ldots p^{(n)}$;

cioè da P' quello, che occupa il primo posto inco-

minciando a numerarli da una banda della retta su cui sono disposti; da P'' quello che occupa il secondo posto, da P''' il terzo, ecc. finalmente da $P^{(n)}$ l'ennesimo ossia l'ultimo; e la loro somma sia indicata colla S.

Se sarà $P'+P''+P'''+\ldots+P^{(m-1)}<\frac{1}{2}S$,

e nello stesso tempo

$$P'+P''+P'''+\ldots+P^{(m-1)}+P^{(m)}>\frac{1}{2}S,$$

il punto cercato, quello cioè nel quale converrà raccogliere tutti i pesi $P', P'', P''', \ldots P^{(n)}$, perchè la spesa dei trasporti riesca la minima sarà il punto stesso occupato dal peso $P^{(m)}$ emmesimo dei dati; se poi sarà

$$P'+P''+P'''+\ldots+P^{(m-1)}+P^{(m)}=\frac{1}{2}S,$$

il punto cercato potrà essere uno qualunque di quella retta, che ha i termini dove sono collocati i due pesi $P^{(m)}$, $P^{(m+1)}$.

Incomincio a dimostrare la prima di queste due asserzioni. Si ponga per semplicità, $P'+P''+P'''+\ldots+P^{(m-1)}=Q$; e si indichino coi punti M, N, P (fig. 40) i tre luoghi nei quali sono situati i pesi $P^{(m-1)}$, $P^{(m)}$, $P^{(m+1)}$; più si nomini S' quella spesa, che si farebbe onde radunare in N i pesi $P', P'', P'''\ldots P^{(m-1)}$, ed S'' quella, che si farebbe per trasportare nel punto N medesimo i pesi $P^{(m+1)}$, $P^{(m+2)}, \ldots P^{(n)}$.

Se il punto, dove si debbono trasportare tutti i pesi, fosse l'm tra mezzo ai due M, N, la spesa pel trasportamento risulterebbe eguale ad

$$S' - Q \cdot Nm \cdot s + S'' + (S - Q)\, Nm \cdot s\,,$$

ossia ad $\quad S' + S'' + s(S - 2Q)\, Nm\,,$

la quale è evidentemente maggiore della $S' + S''$ necessaria per radunare i pesi stessi in N, stantechè si ha

$$P' + P'' + P''' \ldots + P^{(m-1)} \text{ ovvero } Q < \tfrac{1}{2} S.$$

Pertanto, siccome ciò che si è detto pel punto m situato tra mezzo agli M, N, molto più vale per tutti quelli, che sono a sinistra dell'M medesimo; così il punto della riunione in quistione, cioè il punto cercato, se $Q < \frac{1}{2} S$, non può essere alla sinistra di quello nel quale è situato il peso $P^{(m)}$.

Ma l'altra relazione, che ha luogo anch'essa, cioè la

$$P' + P'' + P''' + \ldots . + P^{(m-1)} + P^{(m)} > \tfrac{1}{2} S,$$

somministra $P^{(m+1)} + P^{(m+2)} + \ldots . + P^{(n)} < \frac{1}{2} S$;

per cui, mediante un ragionamento analogo a quello fatto sopra, si trova, che il medesimo punto cercato non può essere neppure a destra di quello nel quale è situato il peso $P^{(m)}$ medesimo; adunque il punto cercato, non potendo essere nè a destra nè a sinistra del punto ove è situato il peso $P^{(m)}$, sarà esso questo medesimo punto. Ciò che si doveva dimostrare in primo luogo.

Se fosse $Q + P^{(m)} = \frac{1}{2} S$, risulterebbe la spesa per trasportare tutti i pesi in un punto m qualunque della NP costante, ed eguale ad $S' + S''$; cioè la stessa, dovunque si trovi sulla NP il punto della loro riunione; e colle stesse cose esposte superiormente, si proverebbe che il punto del radunamento richiesto non può essere nè a sinistra nè a destra della stessa porzione NP; e per tanto il medesimo punto potrà essere uno qualunque della medesima retta NP. Ciò che si doveva dimostrare in secondo luogo.

Quindi per iscoprire il medesimo punto richiesto nella proposta proposizione si formerà la serie delle quantità

$$P', P' + P'', P' + P'' + P''', P' + P'' + P''' + P^{IV}, \ldots;$$

e si continuerà, finchè siasi trovato il primo fra i suoi termini, che risulti maggiore od eguale ad una metà della S: fatto ciò, se l' ultima di siffatte quantità sarà maggiore di $\frac{1}{2} S$, il punto o luogo richiesto sarà quello occupato dall' ultimo peso aggiunto per formare l' ultima di esse; e nell' altro caso, cioè se l' ultima di esse quantità eguaglierà $\frac{1}{2} S$, il punto cercato potrà essere dovunque nella retta terminata, che ha un termine nel luogo dell' ultimo peso aggiunto, e l' altro dove è situato quello che si trova in seguito a questo medesimo.

Corollario I. Se i pesi $P', P'', P''', \ldots P^{(n)}$ fossero eguali fra loro e di un numero dispari, il punto dove converrebbe radunarli, affinchè la spesa fosse minima, sarebbe il posto occupato dal medio, cioè

dal peso $P^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$; se poi il loro numero fosse pari, essi si potrebbero riunire in un punto qualunque della retta avente i suoi termini nei luoghi occupati dei due intermedj $P^{\left(\frac{n}{2}\right)}$, $P^{\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.

Corollario II. Se i pesi a radunarsi fossero solamente due, il punto dove converrebbe radunarli, affinchè la spesa del trasporto fosse un minimo sarebbe il posto del maggiore di essi; se poi questi due pesi fossero fra loro eguali, si potrebbero radunare in un punto qualunque della retta terminata che unisse i loro posti; giacchè le spese necessarie per radunarli in un punto qualsivoglia di questa retta sarebbero tutte fra loro eguali.

Osservazione. Se il peso situato in uno dei due punti estremi sarà maggiore di quello situato più vicino ad esso, e questo maggiore dell' altro suo prossimo, e così di seguito sino a quello collocato all' altro estremo della fila di essi, il quale fosse il più piccolo di tutti; onde abbreviare la ricerca del punto nel quale converrà fare la loro unione per ispendere meno, converrà intendere colla P' il peso più grande degli altri; colla P'' il contiguo, ecc; così colla $P^{(n)}$ il più piccolo. Anzi, in pratica si potrà risparmiare la formazione delle prime delle suddette quantità, per iscoprire il peso $P^{(m)}$ o propriamente il suo posto, e passare immediatamente alla formazione delle ultime di esse quantità, cioè alla formazione di quelle fra le quali probabilmente ve

ne sarà una eguale alla metà di S, ovvero due fra loro contigue, una maggiore e l'altra minore della metà della S medesima.

Proposizione undecima. Problema.

Su tutta la superficie M (fig. 41) piana ed orizzontale di un contorno conosciuto debbasi prendere della terra ad una piccola altezza costante a, per trasportarla in un dato punto: vuolsi la spesa del trasporto di questa terra, supposto che sia tutta di una medesima gravità specifica?

Volendo risolvere questa proposizione rigorosamente converrebbe sapere per mezzo di sperienze preliminari, quanto sia il viaggio che si risparmia a ciascuna particella terrea nel caricarla sugli strumenti. Poichè, siccome lo strumento destinato al trasporto vien collocato fra il punto ove si vuol fare l'ammucchiamento e il luogo dove si ha a prendere la terra da trasportarsi, viensi con ciò dai caricatori a risparmiare una breve porzione di viaggio ai conduttori; ma prescinderemo da ciò stante l'incomodo che soffrono i trasportatori medesimi nel sollevare i carichi, nel versarli, e nelle voltate che fanno per ogni andiriviene.

Si riferiscano tanto il punto nel quale si deve trasportare la terra, quanto qualunque punto della superficie M e del suo contorno ai medesimi due assi ortogonali, i quali passino pel primo di questi medesimi punti; e siano situati nella superficie stessa; e chiaminsi x, y le coordinate di un punto qualunque della superficie M medesima.

Egli è evidente che la somma dei prodotti dei pesi trasportati nelle rispettive distanze trascorse sarà data da

$$ag\iint dx\,dy\sqrt{x^2+y^2}$$

esteso l'integrale all'intero contorno della stessa superficie *M*.

Ora supposta conosciuta per mezzo di altre sperienze preliminari la spesa necessaria al trasporto per una conosciuta distanza D di un conosciuto peso P, eseguendo questo trasporto cogli stessi mezzi coi quali vuol trasportarsi la terra dell'area in quistione; chiamata s questa spesa, ed S la spesa totale cercata, avremo

$$S=\frac{sag}{DP}\iint dx\,dy\sqrt{x^2+y^2};$$

ovvero chiamando V, G la gravità specifica e il volume del peso P, si avrà

$$S=\frac{sag}{GVD}\iint dx\,dy\sqrt{x^2+y^2}.$$

Vi sarebbero qui alcune riflessioni da farsi riguardo anco a quella terra che può trovarsi molto vicina al punto ove si deve trasportarla, ma essendo esse cose ovvie, giudico di tralasciarle.

Corollario I. Se si dovesse trasportare in A (fig. 42) la terra sottoposta al triangolo ABC rettangolo in B, si avrebbe

$$S=s\frac{ag}{GVD}\left\{\tfrac{1}{6}bce+\tfrac{1}{6}b^3\log.\frac{c+e}{b}\right\}=\frac{agb}{bGVD}\left\{ce+b^2\log.\frac{c+e}{b}\right\};$$

ove b, c, ed e rappresentano rispettivamente AB, BC, AG.

Corollario II. Se la terra da trasportarsi trovasi su di un rettangolo, e dee essere raccolta nel vertice di uno de' suoi angoli, chiamando b, c i suoi lati adjacenti. e una diagonale, e conservando le altre denominazioni precedenti, la spesa del trasporto sarà

$$S = s \cdot \frac{g\,a}{6\,G\sqrt{D}} \left\{ 2\,b\,c\,e + b^3 \log . \frac{c+e}{b} + c^3 \log . \frac{b+e}{c} \right\}.$$

Corollario III. Se in vece di un rettangolo si avesse la terra sparsa su di un quadrato di lato b, la spesa richiesta risulterà

$$S = s\,\frac{a\,b^3 g}{3G\sqrt{D}} \left\{ \sqrt{2} + \log . (1 + \sqrt{2}) \right\} = s\,\frac{a g}{G\sqrt{D}} (0,765195)\,b^3.$$

Così per un analogo trasporto della terra sparsa similmente su di un quadrato avente b' per lato, chiamata S' la spesa necessaria per questo trasporto, si avrà $S' = s\,\frac{a g}{G\sqrt{D}}\,(0,765195)\,b'^3$; e però sarà $S : S' = b^3 : b'^3$. Vale a dire, le spese in quistione stanno fra loro geometricamente, come i cubi dei lati dei quadrati su cui trovansi sparse le terre a trasportarsi.

Corollario IV. Se la terra da raccogliersi esiste sotto ad un triangolo qualunque (fig. 43, 44) e vuolsi raccoglierla in A vertice di uno qualunque de' suoi angoli; chiamando b la perpendicolare AP calata dal punto A sul lato opposto BC, e se bisogna sul suo prolungamento; c, e c' le distanze dal suo piede di questa perpendicolare ai due punti B, C, cioè c la distanza maggiore di esse, c' l'altra; e, ed e' i due lati AB, AC, cioè e il maggiore di essi, ed e' l'altro; la spesa del trasporto, allorchè la perpendicolare cadrà sul lato BC, sarà

$$s\cdot\frac{g\,a}{6\,GVD}\,b\left\{c\,e+c'\,e'+b^2\log.\frac{(c+e)\,(c'+e')}{b\,b'}\right\};$$

ed allorchè la perpendicolare cadrà sul prolungamento dello stesso lato BC, risulterà

$$s\cdot\frac{g\,a}{6\,GVD}\,b\left\{c\,e-c'\,e'+b^2\log.\frac{c+e}{c'+e'}\right\}.$$

Osservazione I. Se la terra a trasportarsi sarà sottoposta uniformemente all' area di qualunque poligono piano rettilineo ed orizzontale, e debbasi raccogliere in un punto preso comunque dentro o fuori del poligono medesimo, la spesa del trasporto si conseguirà facilmente colle due formole esposte nell' ultimo corollario.

Osservazione II. L' espressione $\dfrac{\iint dx\,dy\,\sqrt{x^2+y^2}}{\iint dx\,dy}$, essendo gli integrali estesi a tutto l' area M, si può chiamare *distanza media* dell' area medesima dal punto dove si pone l' origine delle coordinate; poichè questa distanza moltiplicata per l' area stessa dà un prodotto eguale alla somma di tutti gli elementi di essa moltiplicati ciascuno per la propria distanza; ed è perciò come un adequato delle distanze di tutti questi elementi.

Questa distanza, in un settore circolare, rispetto al suo centro è due terzi del suo raggio; in un quadrato, rispetto al vertice di uno de' suoi angoli essa è di (0,765195) b; ove b indica il suo lato. In generale essa è maggiore della distanza del centro di gravità dal punto medesimo, ove si dee raccogliere la terra: però quando la figura sotto della quale trovasi sparsa la terra sia raccolta, e le sue

dimensioni siano piccole in confronto della sua distanza dal punto del raccoglimento una tale distanza media differisce assai poco dalla detta distanza del centro di gravità.

Osservazione III. Quando non si conosceranno le equazioni dei contorni della superficie M, si potranno trovare i valori degli integrali $\iint dx\,dy\,\sqrt{x^2+y^2}$, $\iint dx\,dy$ con uno de' metodi conosciutissimi, appositamente immaginati per siffatte ricerche.

Osservazione IV. Usando le coordinate polari, coll'origine nel punto dal quale sopra si contano le distanze dei trasporti, chiamando ϕ il raggio vettore, ω l'angolo che esso fa con una retta fissa, avremo, per esprimere la quantità che precedentemente era espressa dall' integrale $\iint dx\,dy\,\sqrt{x^2+y^2}$, e che chiameremo all' uopo *somma delle distanze*, l'espressione

$$\iint \phi^2\,d\phi\,d\omega\text{, ossia } \tfrac{1}{3}\int \phi^3\,d\omega.$$

Con quest' ultima formoletta facilissimamente si generalizza l' ultimo risultamento posto nel corollario terzo, cioè che, se le terre sparse uniformemente ed a picciola altezza sopra due figure simili qualsivogliono si dovessero trasportare rispettivamente, in due punti similmente posti rispetto alle figure stesse, le spese di cui si parla starebbero fra loro come i cubi delle linee omologhe delle figure stesse.

Osservazione V. Se coi principj qui sopra esposti si volesse determinare quel punto nel quale converrebbe raccogliere la terra sparsa uniformemente sopra un dato piano orizzontale di cui si conoscessero i contorni, acciò la spesa risultasse la minima; ecco

come bisognerebbe regolarsi, volendo prescindere dallo spazio che sarà occupato dalla base del mucchio, e da altre picciole circostanze, cose tutte per altro che si possono facilmente computare.

Si riferisca il punto cercato, ed anco un punto qualunque del piano sotto cui è sparsa la terra, ai medesimi due assi ortogonali; e si chiamino α, β le coordinate del punto cercato, ed x, y le analoghe di un punto qualunque del piano stesso. Evidentemente il punto cercato sarà quello le cui coordinate renderanno minimo l' integrale

$$\iint dx\,dy\,\sqrt{(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2}$$

esteso fra gli estremi del piano stesso sotto al quale trovasi la terra; e però i valori richiesti delle coordinate α, β, dovranno soddisfare le due equazioni, che si avranno eguagliando a zero i due integrali

$$\iint\frac{(\alpha-x)\,dx\,dy}{\sqrt{[(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2]}},\ \iint\frac{(\beta-y)\,dx\,dy}{\sqrt{[(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2]}}$$

estesi ambedue fra gli anzidetti limiti.

Non mi estendo sullo sviluppo di queste equazioni, perchè ciò non presenta nessuna difficoltà, se si prescinde dalle analitiche; e fo riflettere che le cose qui sopra esposte si possono estendere facilmente ai casi che le terre non siano sparse uniformemente sulla superficie M.

Proposizione dodicesima. PROBLEMA.

Determinare quelle porzioni della terra sparsa comunque sopra un dato piano orizzontale, che si debbono raccogliere in più punti individuati di esso pia-

no; affinchè la spesa del totale trasportamento riesca la minima?

I punti nei quali si debbe trasportare la terra siano gli A, B, C, D, ed E (fig. 45).

Si uniscano le rette terminate AB, AC, AD, AE; ad esse si tirino le perpendicolari $ab, a'c, a''d, a''e$, le quali passino pei rispettivi loro punti di mezzo; e nello spazio... $a\,1\,2\,e$... entro cui vi è il punto A, ed il cui contorno è formato di porzioni delle dette perpendicolari, non essendo esso attraversato da veruna di esse, si avrà la terra a trasportarsi in A. Similmente, si uniscano le BC, BD, BE, e pei loro punti di mezzo tirinsi le rispettive perpendicolari $b'c', b''d', b'''e'$; e la figura... $a\,1\,3\,b'$... sarà la base della terra a trasportarsi in B; in maniere analoghe si determineranno gli spazj ... $b'\,3\,d''$ ..., $d''\,3\,1\,2\,d'''$ ..., ... $d'''\,2\,e$ ... nei quali è situata rispettivamente la terra a trasportarsi nei punti C, D, ed E, perchè la spesa totale del trasportamento riesca la minima.

Eseguita la costruzione indicata, si vede, che sono inutili le rette $a'c, b'''e', c'''e''$: sarà però sempre bene, non allontanarsi dalla regola esposta; e ciò onde evitare la confusione o non cadere in errore.

Non do la dimostrazione della costruzione medesima, giacchè è per sè evidente; ed in vece passo ad esporre la regola generale per completare la proposta proposizione.

Si nominino A, B, C, D, E, F, ecc. i punti nei quali si vuole trasportare la terra sparsa sul piano dei medesimi punti. Si tirino le rette perpendicolari alle rette terminate AB, AC, AD, AE, AF, ecc.

e che passino rispettivamente pei loro punti di mezzo, e si costituirà intorno al punto A una figura, i cui estremi consisteranno in porzioni di tutte o di alcune solamente di queste perpendicolari, ed avrà anco la proprietà di non essere attraversata da nessuna di esse. Si faccia altrettanto rispetto alle rette BC, BD, BE, BF, ecc. CD, CE, CF, ecc. e si avranno intorno ai punti B, C, D, ecc. le figure analoghe alla dianzi formata intorno al punto A. Le terre situate negli spazj costituiti dalle figure così formate saranno quelle, che si dovranno rispettivamente radunare nei punti dati A, B, C, D, ecc.; perchè la spesa del trasporto riesca la minima.

Osservazione I. Se la terra a raccogliersi fosse circoscritta da una o più bande, od anco interamente, e da linee qualsivogliono, fosse essa cioè in mezzo ad un dato contorno, ed essa si dovesse trasportare in punti individuati situati dentro il contorno stesso, o fuori, od alcuni d'entro e gli altri fuori del medesimo, si soddisfarebbe la quistione precisamente, come si è soddisfatta quella esposta sopra. Per esempio, se la terra a raccogliersi fosse quella situata entro il contorno $\alpha\beta\delta\mu\theta\lambda$; e si dovesse radunare nei punti A, B, C, D, ed E; affinchè la spesa riescisse la minima, converrebbe trasportare nei punti stessi A, B, C, D, ed E rispettivamente le terre racchiuse fra i contorni $a12e\beta$, $a13b'\delta$, $b'3d''\theta\mu$, $d''312d'''\lambda$, $d''2ex$.

Corollario I. Se si dovesse raccogliere la terra sparsa comunque sul rettangolo $ABCD$ (fig. 32) nei punti D, E, F del suo lato DC, converrebbe,

onde la spesa fosse la minima, trasportare rispettivamente in D, E, F, le porzioni di terra corrispondenti alle figure rettangolari $ADde$, $dfec$, $fCBe$ determinate col condurre le dc, fe pei punti d, ed f di mezzo delle DE, EF perpendicolarmente alle stesse DE, EF.

Osservazione II. Se uno strato di terra sparsa su di un dato poligono rettilineo si dovesse raccogliere al perimetro di esso, e che si potessero dirigere le strade per qualunque verso a traverso del medesimo; affinchè la spesa del trasporto totale risultasse la minima, supposto tutte le vie egualmente faticose, converrebbe primieramente fare per le rette dividenti i suoi angoli ciò che si è fatto sopra per le rette ab, $a'c$, $a''d$, $b'c'$, ecc.; e con ciò si dividerebbe il poligono dato in tante figure quanto sono i lati del poligono medesimo, ciascuna delle quali avrebbe fra i lati un lato del poligono stesso; indi far trasportare la terra sparsa su ciascuna di così fatte figure dirigendo le vie di trasporto perpendicolarmente al lato comune ad essa ed al medesimo poligono dato. Questa regola, con poche modificazioni, si potrà estendere anco all' analogo esportamento delle terre sparse su poligoni mistilinei o curvilinei.

Proposizione tredicesima. Problema.

Determinare il contorno di quella porzione di terra sparsa comunque su di un piano orizzontale, perchè il raccoglimento di una data massa di essa in un punto fissato in esso piano costi il minimo?

Si descriva nn cerchio, che abbia il centro nel punto dato e sia tale che la terra insistente su di esso abbia la massa, che si vuole raccogliere in esso punto; e la periferia di siffatto cerchio sarà il contorno dimandato.

Sebbene anco questa proposizione sia facile a concepirsi senza dimostrazione ed anco a dimostrarsi elementarmente, non ostante, io stimo di esporre la dimostrazione seguente. Pel punto dato, si tirino tre rette, due nel piano orizzontale su cui è sparsa la terra, e la terza verticale; ed x, y, z esprimano le coordinate rettangole di un punto della terra a trasportarsi, riferito questo punto alle dette tre rette; più $\varphi(x, y)$ indichi la densità della terra corrispondente alle coordinate orizzontali x, y.

Egli è evidente che la quistione si riduce a determinare il contorno per modo, che l' integrale $\int\int z\varphi(x,y)\,dx\,dy\sqrt{x^2+y^2}$ sia un minimo e nello stesso tempo che l'altro integrale $\int\int z\varphi(x,y)\,dx\,dy$ eguagli la massa a raccogliersi; e pertanto, indicando colle $\psi(y)$, $f(y)$ gli integrali $\int z\varphi\sqrt{x^2+y^2}\cdot dy$, $\int z\varphi\, dy$, colla λ una costante, dovrà essere l' y una tale funzione della x da rendere minimo l'integrale $\int(\varphi-\lambda f)\,dx$; e però dovrà essere

$$\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)-\lambda\left(\frac{df}{dy}\right)=0, \text{ cioè}$$

$$z\varphi(x,y)\sqrt{x^2+y^2}-\lambda z\varphi(x,y)=0;$$

equazione che somministra $\sqrt{x^2+y^2}=\lambda$. Quindi

il contorno cercato consisterà in una periferia circolare avente il centro nel punto fissato e per raggio λ.

Questo raggio si determinerà col rendere l'integrale $\int\int z\phi dxdy$ esteso da $y=\sqrt{\lambda^2-x^2}$ sino ad $y=-\sqrt{\lambda^2-x^2}$ eguale alla massa di terra a raccogliersi.

Osservazione. Se il contorno del piano su cui è sparsa la terra fosse dato da una o più bande, il contorno cercato sarebbe formato di porzioni della periferia di un medesimo cerchio e da una o più porzioni del medesimo contorno dato.

In questo risultamento s' incomincia a vedere che le porzioni incognite o libere dei contorni qui cercati hanno per normali quelle rette, che sono le vie di trasporto: nel seguito si vedrà questo risultamento generalizzato.

Proposizione quattordicesima. PROBLEMA.

La terra sparsa uniformemente sul rettangolo $ABCD$ (fig. 46) si debba trasportare nei punti A, B in modo, che la massa di quella trasportata in A, abbia a quella della trasportata in B un rapporto dato; si dimanda la linea, che dovrà separare quella porzione del rettangolo $ABCD$ nella quale converrà prendere la terra a trasportarsi in A, dalla rimanente porzione di esso cioè da quella nella quale converrà prendere la terra a raccogliersi in B, volendo che la spesa totale del trasporto riesca la minima?

La linea richiesta sia indicata dalla SMG. Si nominino le aree $ABCD$, $AGSD$, $BCSG$ rispettivamente S, A, B; e si ritengano le masse della terra sparse sulle superficie $ABCD$, $AGSD$, $BCSG$ indicate colle stesse aree S, A, B. Evidentemente, se il rapporto delle masse di terra a raccogliersi in A e B sarà quello di m ad n, si avrà

$$A = \frac{m}{m+n} S, \text{ e } B = \frac{n}{m+n} S.$$

Siano x, y le coordinate rettangole di un punto qualunque della superficie $AGSD$ riferito agli assi AB, AD; così x', y' siano le analoghe coordinate di un punto qualunque della superficie $BCSG$; ed $\dot{x}$, $\dot{y}$ quelle della linea GMS, cioè $\dot{x} = AP$, ed $\dot{y} = PM$. Più pongasi $AB = a$.

Le spese dei trasporti in A e B delle terre sparse sulle superficie $AGSD$, $GSCB$ saranno rispettivamente esprimibili dagli integrali

$$\int\!\!\int dx\,dy \sqrt{x^2 + y^2}\,,\quad \int\!\!\int dx'\,dy' \sqrt{(a-x')^2 + y'^2}$$

estesi fra i limiti indicati dai contorni delle stesse superficie $AGSD$, $GSCB$; e la terra a trasportarsi in A dall' integrale $\int \dot{x} d\dot{y}$ esteso da $\dot{y} = 0$ sino ad $\dot{y} = AD$.

Si ponga l'integrale $\int dx \sqrt{x^2 + y^2}$ esteso da $x = 0$ sino ad $x = \dot{x}$ eguale a $\varphi(\dot{x}, \dot{y})$: evidentemente sarà $\left(\frac{d\varphi}{d\dot{x}}\right) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$. Così ponendo l' integrale $\int dx' \sqrt{(a-\dot{x})^2 + \dot{y}^2}$ esteso da $x' = \dot{x}$ sino ad $x' = a$,

eguale a $\psi(\dot{x}, \dot{y})$, avrassi $\left(\frac{d\psi}{d\dot{x}}\right) = -V\overline{(a-\dot{x})^2+\dot{y}^2}$.

E le spese pei trasporti verranno espresse dagli integrali $\int \varphi d\dot{y}$, $\int \psi dy$ estesi entrambi da $\dot{y} = 0$ sino ad $y = AD$; e pertanto, intendendo con λ un coefficiente costante, per soddisfare la proposta proposizione converrà determinare la $\dot{x}$ per modo, che risulti un minimo l'integrale $\int(\varphi + \psi + \lambda\dot{x})d\dot{y}$ esteso fra i detti due limiti.

Per conseguire questo valore della $\dot{x}$ il calcolo delle variazioni somministra l'equazione seguente

$$\left(\frac{d\varphi}{d\dot{x}}\right) + \left(\frac{d\psi}{d\dot{x}}\right) + \lambda = 0,$$

colla quale, ponendo per $\left(\frac{d\varphi}{d\dot{x}}\right)$, $\left(\frac{d\psi}{d\dot{x}}\right)$ i loro valori esposti sopra, ottiensi

$$V\overline{\dot{x}^2+\dot{y}^2} - V\overline{(a-\dot{x})^2+\dot{y}^2} + \lambda = 0,$$

ossia $$V\overline{(a-\dot{x})^2+\dot{y}^2} - V\overline{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \lambda.$$

Quest' ultima equazione ci insegna, che la linea cercata GMS dev' essere una porzione di un ramo di una iperbola conica avente i fuochi nei punti stessi A, B: questo ramo sarà quello, che volterà la concavità verso A, se la massa A dovrà essere minore della B; e sarà l' altro, se dovrà essere A maggiore di B.

Per determinare affatto questa iperbola convien distinguere i due casi qui indicati: sia per esempio la massa A minore della B.

Nominata α quel suo asse di questa iperbola, che prolungato passa pei fuochi, e β l' altro; si trova

dopo varie operazioni, l' area QSG eguale ad

$$\frac{1}{2}\frac{c\alpha}{\beta}\sqrt{c^2+\beta^2}-\frac{\alpha\beta}{2}\log.\frac{c+\sqrt{c^2+\beta^2}}{\beta}:$$

dove c è posto per AD. Così si ha l' area del rettangolo $AQSD$ eguale ad $\frac{1}{2}\ ac-\frac{c\alpha}{\beta}\sqrt{(c^2+\beta^2)}$ e per conseguenza, siccome tutta l' area $AGMSD$ dev' essere eguale alla A, si avrà l' equazione

$$ac-\frac{c\alpha}{\beta}\sqrt{c^2+\beta^2}-\alpha\beta\log.\frac{c+\sqrt{c^2+\beta^2}}{\beta}=2A,$$

la quale combinata colla notissima $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{4}a^2$, somministrerà i due semiassi α, β della iperbola in quistione, i quali nel caso nostro sono sufficienti per rendere tutta nota l' iperbola cercata.

Corollario. Se fosse $A=\frac{1}{2}S$, ossia $m=n$, queste due ultime equazioni sarebbero soddisfatte da $\alpha=0$, e $\beta=\frac{1}{2}a$; valori i quali significano, che in tal caso la linea cercata sarà la retta perpendicolare alla AB, e che passa pel suo punto di mezzo.

Osservazione I. Se il ramo GMS, affinchè l'area $AGMSD$ risulti eguale all' A, dovesse passare pel punto D, i semiassi della iperbola si determinerebbero colle due equazioni

$$\frac{c\alpha}{\beta}\sqrt{c^2+\beta^2}-\alpha\beta\log.\frac{c+\sqrt{c^2+\beta^2}}{\beta}=2A,\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{4}\alpha^2.$$

Se poi per soddisfare la detta condizione si richiedesse che il ramo medesimo segasse la stessa retta AD converrebbe determinare i suoi semiassi colle due seguenti equazioni

$$\frac{\beta}{4\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{2z^2}-\tfrac{1}{2}z^2-2\alpha^2\log.\frac{\alpha}{z}\right)=\dot{A},\ \alpha^2+\beta^2=\tfrac{1}{4}a^2,$$

dove $z=\tfrac{1}{2}a-\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2-\alpha^2}$.

Tutte queste equazioni dalle quali abbiamo fatto dipendere gli assi della iperbola di cui è porzione la linea cercata, si dimostrano assai facilmente col soccorso del calcolo integrale.

Osservazione II. Se la terra non fosse sparsa uniformemente sul rettangolo $ABCD$, come abbiamo sin qui supposto tacitamente, cioè non avesse dovunque o la medesima altezza o la stessa densità od anco nè l' una nè l'altra di queste proprietà, indicando colla $f(x,y)$ la derivata seconda parziale della massa di terra rispetto alle stesse x,y, analoghe cousiderazioni a quelle fatte superiormente, somministrerebbero per equazione della linea cercata, la seguente

$$\left(\frac{d\phi}{d\dot{x}}\right)f(\dot{x},\dot{y})+\left(\frac{d\Phi}{d\dot{x}}\right)f(\dot{x},\dot{y})+\lambda f(\dot{x},\dot{y})=0;$$

e però

$$\left(\frac{d\phi}{d\dot{x}}\right)+\left(\frac{d\Phi}{d\dot{x}}\right)+\lambda=0.$$

Vale a dire la linea richiesta, sarebbe anco in questo caso una porzione di un ramo di una delle iperbole coniche, che hanno i fuochi nei punti stessi A, B.

Gli assi di questa iperbola si determinerebbero col soddisfare la equazione $\tfrac{1}{4}a^2=\alpha^2+\beta^2$, e col rendere l' integrale $\iint dx\,dy\,f(x,y)$ esteso fra i contorni $AGSMD$ eguale alla massa A, come sopra.

Osservazione III. Qualunque sia il contorno della superficie piana orizzontale sulla quale trovasi sparsa comunque la terra, e dovunque si trovino i due punti nei quali si debbano raccogliere le due date masse di terra, quella linea che dovrà dividere la superficie medesima nelle due porzioni, in una delle quali converrà prendere la terra a traspórtarsi in uno dei punti dati e nell' altra quella a traslocarsi nell' altro dei medesimi, volendo sempre che la spesa del raccoglimento risulti la minima, dovrà essere qui pure una parte di un ramo di una iperbola conica avente i fuochi nei due punti dati; ciò si può dimostrare direttamente e precisamente come si è fatto sopra pel caso contemplato; ed i suoi semiassi si potranno determinare facendo in modo, che la terra situata su di una di dette porzioni eguagli la massa di terra, che si dovrà raccogliere nel punto corrispondente.

Osservazione IV. Se non fossero dati i contorni della superficie sulla quale trovasi sparsa la terra a trasportarsi, ma fossero dati come sopra due punti di essa nei quali si dovessero raccogliere due date masse della terra medesima, e il cerchio descritto centrando in uno di essi con un raggio tale che la terra insistente sul medesimo eguagliasse la massa a raccogliersi in esso punto risultasse sì grande, che la sua periferia intersecasse la periferia del cerchio analogamente descritto centrando nell' altro punto; in tal caso, i due spazi nei quali sarebbe d' uopo prendere la terra per costituire i due mucchi, separati sarebbero l' un dall' altro da un arco di una iperbola avente i fuochi nei due punti medesimi, e

i rimanenti loro contorni sarebbero archi circolari, i quali incontrerebbero il detto arco iperbolico nei medesimi due punti.

In fine, se fossero dati solamente alcune delle linee indicanti i contorni dello spazio in cui è situata la terra a raccogliersi in due punti dati, gli spazi nei quali converrebbe prendere la terra, ritenuto sempre la minima spesa, sarebbero separati da un arco iperbolico, come sopra, e dalle rimanenti parti sarebbero circoscritte o da porzioni del contorno dato, ovvero da archi circolari. Vale a dire, i contorni di quegli spazi nei quali converrà prendere la terra a trasportarsi in due dati punti, saranno iperbolici, se fra i comuni, agli spazi stessi, o porzioni di contorno dato, ovvero archi circolari aventi i centri nei rispettivi punti dati, se contorni liberi.

Con poche modificazioni, tutto ciò che si è detto nella ipotesi, che la terra si debba trasportare in due punti, si estende anco al caso, che i punti dove si debbe raccoglierla sieno tre o più: sempre cioè ha luogo ciò, che si è detto dianzi rispetto ai contorni comuni, dati, o liberi.

Osservazione V. Occorre spesse volte da dovere spargere della terra su di una superficie piana orizzontale secondo una legge data, la quale terra si trova qua e là raccolta in più mucchi situati sulla stessa superficie, e di cui si conoscono le posizioni ed almeno i rapporti delle masse, se non le masse stesse: le porzioni di essa superficie, nelle quali si dovrebbero rispettivamente spargere le terre costituenti i mucchi stessi, affinchè la spesa dello spargimento risultasse la minima, sarebbero precisamente

quelle sue porzioni, nelle quali converrebbe prendere la terra, se fosse già sparsa, qualora si volessero costituire i medesimi, identici mucchi dati. Quindi ciò che si è detto nelle ultime proposizioni rispetto al raccoglimento della terra, si estende anco allo spargimento di essa. Per esempio, se nei punti A, B (fig. 46) vi fossero le masse A, B di terra, e si dovessero spargere sulla superficie rettangolare $ABCD$, perchè la spesa di questa operazione riescisse la minima, converrebbe spargere la terra situata in A entro lo spazio $AGMSD$, e quella situata in B nel rimanente $BCSMG$.

Osservazione VI. Se la terra sparsa come sopra sul rettangolo $ABCD$ si dovesse trasportare in due punti A', B' il primo situato nei contorni dell' A e l'altro del B; e che il trasporto della terra in A' bisognasse eseguirlo colla condizione di passare costantemente pel punto A, indi percorrere la strada AA' fissata, di una figura qualunque; e quello della terra a raccogliersi in B' si dovesse fare col passare costantemente pel punto B e poi camminare per la via BB' anch' essa fissata e di qualsivoglia figura: le porzioni del rettangolo $ABCD$ nelle quali converrebbe prendere le terre a trasportarsi rispettivamente nei punti A', B', affinchè la spesa del totale trasporto risultasse la minima sarebbero separate da un arco di una iperbola conica avente i fuochi negli stessi punti A, B; e l'asse, i cui prolungamenti passano per i medesimi punti A, B, eguale alla differenza delle lunghezze reali o fittizie delle strade AA', BB'. Tutto ciò è agevole a dimostrarsi colle regole usate per isciogliere la proposizione trattata; anzi è facile l' accorgersi

che quest' arco volterà la convessità o la concavità verso il punto A, secondo che sarà la detta lunghezza della strada AA' maggiore o minore della analoga della BB'; più che converrà radunare tutta la terra in A' se la lunghezza valutata della BB' supererà l'analoga della AA' più della effettiva lunghezza della retta AB: reciprocamente ecc.

Così se fosse fissato il numero degli uomini che dovessero trasportare in A porzione della terra sparsa sul rettangolo $ABCD$, ed anco il numero di quelli che dovessero trasportare la rimanente in B, cogli stessi principj sopra usati si troverebbe, la linea che dovrebbe separare le due porzioni, perchè si terminassero i rispettivi trasporti dalle due società nello stesso tempo e colla minima spesa, essere una periferia circolare, facilmente descrivibile, i cui punti sono egualmente illuminati da due corpi luminosi posti l' uno in A e l' altro in B.

Proposizione tredicesima.

Dovendosi trasportare e spandere uniformemente sul rettangolo $EFGH$ (fig. 47) la terra già sparsa uniformemente sull' altro equivalente rettangolo $ABCD$, e nel trasportare sulla superficie $EFTS$ la terra sparsa sulla equivalente $ABQR$ passare costantemente pel medesimo punto K indi percorrere la via KmI, come nel trasportare sulla $STGH$ quella sparsa sull' altra porzione $CDRQ$ passare pel punto N e poi percorrere la strada NnP, si dimandono le linee RQ, TS, perchè la spesa totale del trasporto riesca la minima ?

Si riferiscano i punti dagli spazi $ABQR$, $RQCD$ e quelli della linea RQ agli assi rettangolari Kx, Ky; ed i punti degli spazi $EFTS$, $STGH$ e della linea ST agli assi pure rettangolari It, Iu; e si nominino $\dot{x}$, $\dot{y}$ le coordinate di un punto qualunque della superficie $ABQR$, ed x y, quelle di un punto della linea RQ: e si chiamino rispettivamente m, n le lunghezze delle strade KmI, NnP.

Evidentemente, l'area della superficie $ABQR$ e la spesa del trasporto in I della terra esistente su di essa verranno espresse dagli integrali

$$\int\int d\dot{x}d\dot{y}\ ,\quad \int\int(m+\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2})\,d\dot{x}\,d\dot{y}$$

estesi fra i limiti della stessa figura; e però indicando con $\varphi(x,y)$, $\dot{\varphi}(x)$ gli integrali $\int d\dot{x}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$, $\int d\dot{x}$ estesi fra i limiti $ABQR$, si avranno la spesa e l'area anzidette espresse dagli integrali

$$\int\Big(m\,\dot{\varphi}(x)+\varphi(x\,,\,y)\Big)\,dy\ ,\quad \int\dot{\varphi}(x)\,dy$$

estesi fra i convenienti limiti indicati dallo stesso contorno $ABQR$; più si avrà anco

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \left(\frac{d\dot{\varphi}}{dx}\right)=1\,.$$

Così l'area della superficie $DCQR$ e la spesa pel trasporto in P della terra sparsa su di esso saranno espresse dagli integrali

$$\int\dot{f}(a-x)\,dy\ ,\quad \int\Big(n\dot{f}(a-x)+f(a-x)\Big)\,dy$$

dove $a=KN$, e $\left(\frac{d\dot{f}}{dx}\right)=-1$, $\left(\frac{df}{dx}\right)=-\sqrt{(a-x)^2+y^2}$.

Similmente, nominata t l'ascissa ed u l'ordinata della linea ST, e b la retta IP, le aree delle superficie $EFTS$, $STGH$ e le spese per trasportare su di esse le terre già trasportate nei punti I, P verranno rispettivamente espresse dagli integrali

$$\int \dot{\psi}(t)\,du, \ \int \psi(t,u)\,du, \ \int \dot{F}(b-t)\,du, \ \int F(b-t,u)\,du$$

estesi sino ai contorni delle stesse superficie; e dove

$$\left(\frac{d\dot{\psi}}{dt}\right)=1, \ \left(\frac{d\dot{F}}{dt}\right)=-1, \ \left(\frac{d\psi}{dt}\right)=\sqrt{t^2+u^2},$$
$$\left(\frac{dF}{dt}\right)=-\sqrt{(b-t)^2+u^2}.$$

E per tanto, per le conduzioni volute dalla proposta proposizione dovrà essere minima la somma degli integrali

$$\int\left(m\dot{\phi}(x)+\phi(x,y)\right)dy, \ \int\left(n\dot{f}(a-x)+f(a-x,y)\right)dy,$$
$$\int \psi(t,u)\,du, \ \int \psi(b-t,u)\,du;$$

ed i due $\int \dot{\phi}(x)\,dy$, $\int \dot{f}(a-x)\,dy$ dovranno essere rispettivamente eguali ai due $\int \dot{\psi}(t)\,du$, $\int \dot{F}(b-t)\,du$. Quindi le ordinate y, u dovranno esser tali funzioni delle ascisse x, t da rendere minima la somma degli integrali

$$\int\Big[\phi(x,y)+m\,\dot{\phi}(x)+f(a-x,y)$$
$$+n\dot{f}(a-x)+\lambda\dot{\phi}(x)+\mu\dot{f}(a-x)\Big]dy,$$
$$\int\Big[\psi(t,u)+F(b-t,u)-\lambda\dot{\psi}(t)-\mu\dot{F}(b-t)\Big]du:$$

dove le λ, μ esprimono due costanti arbitrarie.

Per soddisfare a quest' ultima condizione col calcolo delle variazioni si hanno le due equazioni seguenti

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{df}{dx}\right)+(\lambda+m)\left(\frac{d\dot{\varphi}}{dx}\right)+(\mu+n)\left(\frac{d\dot{f}}{dx}\right)=0,$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)+\left(\frac{dF}{dt}\right)+\lambda\left(\frac{d\dot{\psi}}{dt}\right)+\mu\left(\frac{d\dot{F}}{dt}\right)=0;$$

e conseguentemente sarà

$$\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{(a-x)^2+r^2}+\lambda+m-\mu-n=0,$$

$$\sqrt{t^2+u^2}-\sqrt{(b-t)^2+u^2}-\lambda+\mu=0.$$

Quindi le due linee RQ, ST cercate debbono essere archi di rami di due iperbole coniche aventi i fuochi, la prima nei punti K, N, e la seconda negli I, P; e che i loro assi, nei prolungamenti dei quali vi sono i fuochi, differiscono l' un dall' altro di quanto differiscono le m, n.

Ora che si conosce la specie delle linee RQ, ST, la completa soluzione della proposta proposizione trovasi ridotta ad una quistione di analisi affatto comune, la quale non presenta altra difficoltà che la lunghezza dei calcoli; e perciò io qui ne ommetto lo sviluppo ulteriore.

Corollario. Se le m, n fossero fra loro eguali, le iperbole delle quali sono parti le linee cercate avrebbero gli assi secondo le rette KN, IP fra loro eguali; e se i punti P, I coincidessero rispettivamente cogli N, K le medesime due linee richieste sarebbero porzioni di una stesa iperbola; cioè di uno stesso ramo o l' uno dell' uno e l' altro dell' altro ramo di una iperbola sempre conica.

Osservazione I. Nella soluzione della esposta proposizione si è supposto tacitamente che le spese pei trasporti lungo le strade KmI, NnP fossero espresse dai prodotti delle lunghezze di esse strade nei volumi delle terre dalle quali sono esse percorse; se le circostanze richiedessero di dover esprimere queste spese coi prodotti delle lunghezze delle medesime strade nelle masse fittizie delle stesse terre, intendendo colle m, n le lunghezze fittizie delle medesime strade ossia le linee quarte proporzionali geometriche dopo le masse reali, e loro fittizie, e le lunghezze effettive di esse strade, si arriverebbe a conseguenze affatto analoghe a quelle superiormente esposte e dimostrate pel caso contemplato.

Proposizione quindicesima. Problema.

Data l' equazione di una superficie, e le coordinate di un suo punto nel quale è situata una data massa di terra, non che quelle del punto di essa superficie nel quale si deve trasportare la massa medesima; trovare la via a seguirsi nel trasportamento, perchè la spesa riesca la minima, non valutando, come si è fatto in altre proposizioni, la fatica che soffrano i trasportatori nel voltarsi, onde passare da un tronco di strada all' altro ?

Si riferisca la superficie a tre assi ortogonali, uno verticale e gli altri due orizzontali; e si indichino colle x, y, z le coordinate di un punto di essa, cioè colle y, z le due orizzontali e colla x la verticale; più si indichi colla $F(x, y, z) = 0$ l' equazione della stessa superficie data.

Egli è evidente che la massa fittizia varierà col variare la inclinazione coll' orizzonte della strada; e però si potrà essa supporre eguale al prodotto della massa effettiva in una funzione dell' angolo d' inclinazione della stessa strada coll' orizzonte, per esempio ad $m\,\phi\left(\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right)$: dove m indica la massa effettiva, y', z' le derivate rispetto alla x delle y, z; e la ϕ la funzione anzidetta. Quindi la proposta quistione si riduce a determinare quelle fra le funzioni y, z, che soddisfanno l' equazione $F(x,y,z)=0$, e rendono minimo l' integrale doppio

$$\Sigma\int\left(\phi\left(\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right)\sqrt{1+y'^2+z'^2},\right)dx$$

esteso, l' ordinario cioè quello indicato colla $\int$ dal principio alla fine di un tronco qualunque della via cercata, e l' altro vale a dire il finito Σ dal primo tronco all' ultimo inclussivo.

Colle regole del calcolo delle variazioni si trova, che l' equazione a combinarsi colla data $F(x,y,z)=0$, onde avere le anzidette funzioni, è la seguente

$$F'(z)\,[\psi'(y')]'-F'(y')\,[\psi'(z')]'=0,$$

e che dev' essere per ambidue i termini di ogni tronco intermedio, e pel secondo termine del primo e pel primo termine dell' ultimo $\psi'(y')=0$, e $\psi'(z')=0$; dove ψ esprime $\phi\left(\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right)\sqrt{1+y'^2+z'^2}$; e gli apici posti sulle parentisi rettangole significano le derivate rispetto alla x delle quantità chiuse fra le stesse parentesi.

Determinate le funzioni y, z colle due equazioni $F(x,y,z)=0$, $F'(z)[\psi'(y')]' - F'(y)[\psi'(z')]' = 0$, colla conoscenza dei punti dove è situata la massa di terra e quello ove essa si deve trasportare si troveranno due costanti contenute in esse funzioni e relative al primo ed ultimo tronco della strada richiesta.

Esempio. Supponiamo che la superficie sulla quale deve esser la via cercata sia la superficie piana data dall' equazione $z - ax = 0$; ed avremo $F'(z) = 1$, $F'(y) = 0$, e $z' = a$; e l' equazione a combinarsi colla $z - ax = 0$ per iscoprire la strada in quistione sarà la $[\psi'(y')]' = 0$, ossia $\psi'(y') = A$: ove la A esprime una costante.

Ma siccome pei termini od estremità, sopra nominati dei tronchi della strada dev' essere $\psi'(y') = 0$, così sarà $A = 0$. Quindi l' equazione cercata, in questo caso si ridurrà alla $\psi'(y') = 0$, ossia

$$\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\left\{\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right)-\varphi'\left(\frac{1}{\sqrt{(1+y'^2+z'^2)}}\right)\right\}$$

la quale somministra od $y' = 0$, ovvero $y'^2 = b$: b esprime un' altra costante. Vale a dire l' equazione cercata sarà $y = c$, oppure $y = \pm bx + e$, esprimendo colle c, ed e due nuove costanti.

Si concluda pertanto, che i tronchi della strada attuale non possono essere che parti di quelle rette, situate nel piano dato, che hanno coll' orizzonte la maggiore pendenza, ovvero parti di quelle le cui projezioni sul piano orizzontale hanno equazioni analoghe alla $y = \pm bx + e$.

Si potrebbero qui fare varie riflessioni relative alla presente proposizione e particolarmente ai risulta-

menti ottenuti nell' esempio qui fatto, ma siccome senza la cognizione della funzione φ esse riescirebbero puramente curiose, così per ora stimo di ommetterle, e di passare in vece alla osservazione seguente relativa ai presenti trasporti, la quale insieme alle quattro proposizioni poste di seguito ad essa può riescire vantaggiosa in più occasioni al giovin Ingegnere.

Osservazione. Si abbia un peso P da doversi trasportare da un uomo dal punto A (fig. 48) fino ad un punto della retta orizzontale BG, che passa pel punto B situato verticalmente al di sopra di A. Usando opportunemente o di scale o di strade comuni, si potrà trasportarlo secondo qualunque delle rette linee AB, AC, AD, AE, ec. Egli avviene però che le vie più inclinate AC, AE sebbene più brevi delle AF, AG, sono più faticose di queste altre medesime, di modo che è più conveniente il salire per queste sebbene più lunghe; e fino ad un certo segno l' utilità va crescendo al crescere della obbliquità; però solamente fino ad un certo punto; chè scemando ancor più il pendío, l'utilità tornerebbe a diminuire, venendo il vantaggio della cresciuta comodità ad essere superato dallo svantaggio della cresciuta lunghezza: la qual cosa è per se evidentissima. Vi è adunque fra le diverse strade una particolare, per es. AF, la quale a quell' uomo è la più conveniente per lo trasportamento di quel peso: egli scapiterebbe sì salendo per una più inclinata, che per una meno inclinata.

Ciò che si dice per un uomo vale per un cavallo, per un carretto, salvo la differenza che a questi, se

la via è inclinata all' orizzonte oltre ad un certo angolo, riesce del tutto impossibile il poter salire. Vi ha anco per essi una strada particolare più delle altre opportune al trasportamento di un dato peso fino ad una data altezza. Egli è probabile, che questa inclinazione di strada rigorosamente sia variabile da un uomo a uomo, da animale ad animale, da strumento a strumento, ed anco per chi porta, da chi tira, o spinge, come pure da peso a peso. Ma è altri verisimilissimo che per ogni specie di questi agenti, individuato il metodo di trasportare e la materia a trasportarsi, piccolissima debba essere siffatta variazione; di modochè individuata la materia a trasportarsi ed il metodo a seguirsi, determinabile sarà la detta inclinazione per ogni specie d' agenti.

Quello poi che si dice d' un trasporto unico vale proporzionatamente di un trasporto continuato. Se una persona dovesse a suo conto trasportare una grande quantità di pesi ad una data altezza, vi sarà una particolare inclinazione di strada che più di tutte le altre gli tornerebbe a proposito. Sarebbe per tanto cosa assai vantaggiosa che su questo soggetto si facessero delle accurate osservazioni, le quali sarebbero molto utili, segnatamente quando si vogliono formare delle strade sulle montagne o in qualunque altro luogo inclinato coll' orizzonte.

Ed anch' io penso che sarebbe meglio il fare su ciò delle sperienze dirette, anzi che dedurre una siffata inclinazione della formula φ esprimente il peso fittizio in funzione dell' angolo d' inclinazione; e ciò per più ragioni che si presentano facilmente a chiunque pensi alla natura di questa materia.

Suppongo che siano già fatte le sperienze desiderate, e che si conosca per ogni particolare maniera di trasporto l' inclinazione più conveniente a darsi ad una strada rettilinea che conduce ad una data altezza. L' angolo che una siffatta strada fa coll' orizzonte io lo chiamo *angolo della più conveniente inclinazione*, e per semplicità lo rappresento col simbolo α. Egli è chiaro che questo angolo sarà per le salite ordinarie indipendente dall' altezza a cui si deve salire, e che divisa l' altezza stessa in porzioni brevissime, per salire ciascuna di esse converrà che le strade rettilinee, che vorranno usarsi, siano inclinate coll' orizzonte di angoli tutti eguali all' α. Ciò premesso passiamo alla soluzione delle seguenti proposizioni.

Proposizione diciassettesima. Teorema.

Dovendosi trasportare una quantità indefinita di pesi ad una data altezza, la linea che per la minima spesa dovrà seguirsi nel salire, sia essa o retta, o spezzata, o curva a doppia curvatura, avrà tutte le sue porzioni o tronchi inclinati all' orizzonte dell' angolo α.

Imperciocchè, se qualche sua porzione avesse una inclinazione coll' orizzonte diversa dall' angolo α, si potrebbe a questa sostituirne un' altra rettilinea la quale facesse coll' orizzonte un angolo eguale all' α medesimo avvicinando o allontanando convenientemente i prossimi termini delle due porti contigue in modo che l' inclinazione di queste non cangiasse, ed il nuovo pezzo sostituito li potesse congiungere

insieme; ed allora la nuova strada di salita risulterebbe più conveniente dell' altra.

Corollario I. Se la via qui determinata sarà composta di più rette, o sarà una curva a doppia curvatura, essa sarà vantaggiosa egualmente, prescindendo dalle fatiche delle voltate, come se fosse una retta unica inclinata anch'essa all' orizzonte dell'angolo α e conducente alla medesima altezza: tutto ciò è facile a comprendersi paragonando le picciole parti di questa retta a quelle dell' altra strada qualunque essa sia.

Corollario II. La strada più conveniente ad una salita non può essere una curva piana, ma se essa giace in un piano, o dev' esser retta o composta di più rette egualmente inclinata all' orizzonte, cioè fatta come si suol dire a zig zag.

Corollario III. La medesima linea per salire ad una data altezza A, qualunque sia la sua forma, avrà sempre una lunghezza eguale ad $\frac{A}{\text{sen}\,\alpha}$.

Proposizione diciottesima. PROBLEMA.

Determinare la via più economica per trasportare de' pesi da un punto dato in un piano inclinato all' orizzonte ad un altro punto dato nello stesso piano, ma situato a maggiore altezza dal primo?

Siano A, B (fig. 49) i due punti dati, e supponiamo premieramente che la retta AB riesca più inclinata all' orizzonte dell' angolo α. Si tireranno dal punto più elevato B verso il basso due rette $BC..$, BH inclinate all' orizzonte ambedue dell' an-

golo α, l' una a destra e l' altra a sinistra rispetto al punto A, e poscia dal punto A medesimo si tirerà verso l'alto una retta AC anch' essa inclinata all'orizzonte dell' angolo α, e congiungentesi in C con una di quelle calate dal punto B, cioè colla BC..; e sarà ACB una delle vie più economiche: ovvero si condurrà da A una linea $AEFGH$ composta delle rette AE, EF, FG, GH di qualunque lunghezza, ma tutte però inclinate coll' orizzonte dello stesso angolo α, la quale linea spezzata incontri, per esempio, in H una delle rette calate da B; e sarà $AEFGHB$ un' altra delle vie più economiche.

Supponiamo ora che la retta AB, la quale congiunge i due punti A, B dati, sia inclinata all'orizzonte meno dell' angolo α. In questo caso, alcuni trasportatori da me interrogati opinano, che la via più economica sia la stessa AB: io opino però, anzi ho dati teoretici quasi certi, che essa in alcuni casi non regge.

Proposizione diciannovesima. PROBLEMA.

Determinare le via più economica per salire fino ad una data altezza sopra un piano inclinato all' orizzonte?

Se il piano sarà inclinato all'orizzonte più dell'angolo α, la via più economica sarà una delle due rette che faranno coll' orizzonte un angolo eguale all' α. Se poi esso sarà inclinato coll' orizzonte meno dell' angolo α, si vegga ciò che si è detto alla fine della soluzione della proposizione precedente.

Corollario. Una scarpa di un argine sia piana; e da un punto della linea comune a questa scarpa ed alla base dell' argine siano condotte le due rette inclinate coll' orizzonte dell' angolo α, ed esse intercetteranno una porzione del ciglio corrispondente dell' argine medesimo La spesa per trasportare una massa di terra dal punto da cui si sono condotte le due rette anzidette ad un punto qualunque della porzione di ciglio corrispondente riescirà la stessa qualunque sia il punto di questa medesima porzione nel quale essa massa si debba trasportare, sempre che si prescinda dalla fatica che faranno i trasportatori nelle voltate per le strade a zig zag.

Proposizione ventesima. Problema.

Determinare la via più economica per trasportare de' pesi da un punto dato sopra una superficie qualunque ad un altro punto situato sulla medesima superficie, ma più elevato del primo?

Supponiamo primieramente che la data superficie abbia una porzione $MNOP$ (fig. 50) continuata senza interrompimento dall' uno all' altro dei punti dati A, B, in ciascun luogo della quale la sua inclinazione coll' orizzonte sia maggiore dell' angolo α; e supponiamo inoltre che tirando dal punto B, il più alto, due linee BC, BD nella superficie medesima e dirette verso il basso, l' una a destra e l' altra a sinistra, tutte e due inclinate coll' orizzonte dell' angolo α, supponiamo dico, che queste comprendano entro il loro angolo il punto A. In questo caso si condurrà dal punto A medesimo sopra la superficie

verso l' altro una linea o continua siccome la AE, o spezzata comunque siccome la $AFGHILM$, la quale sia dappertutto inclinata all' orizzonte dell'angolo α, e seghi in E o in M l' una o l'altra delle due BC, BD; e sarà la AEB, o la $AFGHILMB$ o qualunque altra similmente condotta una delle vie più economiche, che conducono dal punto A al punto B. In questo caso la via è generalmente fatta a zig zag; e potendosi essa formare in infinite maniere converrà formarla in quella parte della superficie inclinata all'orizzonte, che è o men dura a scavarsi, qualora ciò sia necessario per l' adattamento di essa, o men pericolosa a camminarsi, o dove in somma qualche circostanza lo consigli a preferenza. Di tal maniera sono appunto le strade sulle montagne, che pongono in comunicazione due luoghi, fra i quali la via più breve riescirebbe troppo declive e incomoda.

Quando non hanno luogo le supposizioni precedenti io non so dar regola certa per iscioglière la proposta quistione; solo consiglierei di tracciare due strade, delle quali l'una andasse dal punto più basso A verso B elevandosi o per la linea inclinata coll' orizzonte di α e dalla banda che più avvicina B stesso o per quella della massima pendezza quando questa inclinazione sia minore di α, e si avveri l'opinione emersa superiormente, e giunta finalmente a livello del punto superiore, si andasse a congiungere mediante una orizzontale al punto B; e l' altra discendesse in simil modo dal punto B, che è il più alto, per venire ad incontrare il punto A; e poscia di correggere opportunamente o l' una o l' altra con quei lumi che la sperienza avesse somministrati.

Corollario. Le vie conducenti a diversi punti, che trovansi compresi nell'angolo formato dalle due linee inclinate coll' orizzonte dell' angolo α condotte verso bande opposte dal punto A, sono di lunghezze proporzionali alle altezze a cui conducono, e quindi le spese pei trasporti saranno proporzionali a queste altezze medesime.

Osservazione. In fine, allorchè una via per salire su di una superficie inclinata all' orizzonte si dovrà costruire a zig zag, e ciò per le ragioni esposte qui sopra, sarà bene che ogni sua porzione inclinata continua si faccia almeno prossimamente eguale ad uno o più dei rispettivi ricambj.

Proposizione ventunesima. Problema.

Quali sono le vie che si debbano seguire per trasportare e spandere uniformemente sopra di una superficie piana orizzontale la terra sparsa uniformemente sopra un' altra superficie pure data, piana orizzontale e situata nel medesimo piano dell' altra, affinchè la spesa del trasportamento riesca la minima?

La terra a trasportarsi sia sparsa uniformemente fra le linee GF, ML (fig. 51); e si debba trasportare e spandere uniformemente sullo spazio racchiuso dalle linee pure date CA, KD; più nella Ox cada una delle strade laterali, e nella AL una qualunque.

Non è difficile a concepirsi, che, acciò la spesa del trasportamento sia minima, le strade non debbono incrocicchiarsi le une colle altre; e però dovranno essere gli spazj $CADK$, $GFLM$, racchiusi dalle strade Ox, AL eguali fra loro.

Si riferiscano i punti e le linee alle rette fra loro perpendicolari Ox, Oy fissate per assi delle coordinate; si ponga $OB = x$, $BA = F(x) = y$; $OE = x'$, $ED = F'(x) = y'$; $OH = \dot{x}$, $HF = f(\dot{x}) = \dot{y}$; $ON = \dot{x}'$, $NL = f'(\dot{x}') = \dot{y}'$. La condizione dianzi enunciata, perchè la spesa riesca la minima, somministra l' equazione

$$\int y\,dx + \tfrac{1}{2}(y+y')(x'-x) - \int y'dx' = \int \dot{y}\,d\dot{x}$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\dot{y}+\dot{y}')(\dot{x}'-\dot{x}) - \int \dot{y}'d\dot{x}',$$

la quale dovendo aver luogo qualunque sia la strada AL, con essa sussisterà anco la sua differenziale, cioè $(y-y')\,(dx+dx') + (x'-x)\,(dy+dy')$ $= (\dot{y}-\dot{y}')\,(d\dot{x}+d\dot{x}') + (\dot{x}'-\dot{x})\,(d\dot{y}+d\dot{y}')$.

Ora, si esprima colla u l' ordinata e colla t l' ascissa della AL strada qualunque, e colla $u = \alpha t + \beta$ l' equazione di essa; e si avranno evidentemente le equazioni

$$F(x) = \alpha x + \beta, \quad F'(x') = \alpha x' + \beta,$$
$$f(\dot{x}) = \alpha \dot{x} + \beta, \quad f'(\dot{x}') = \alpha \dot{x}' + \beta.$$

Se nella equazione differenziale, anzi trovata, si porranno per y, y', $\dot{y}$, $\dot{y}'$, e pei loro differenziali dy, dy', $d\dot{y}$, $d\dot{y}'$ i rispettivi valori cavati dalle equazioni delle linee CA, KD, GF, ML; e nella risultante quelli delli dx, dx', $d\dot{x}$, $d\dot{x}'$ desunti da quest' ultime equazioni, i quali sono

$$\frac{x\,d\alpha + d\beta}{\left(\frac{dF}{dx}\right) - \alpha},\ \frac{x'd\alpha + d\beta}{\left(\frac{dF'}{dx'}\right) - \alpha},\ \frac{\dot{x}\,d\alpha + d\beta}{\left(\frac{df}{d\dot{x}}\right) - \alpha},\ \frac{\dot{x}'d\alpha + d\beta}{\left(\frac{df'}{d\dot{x}'}\right) - \alpha};$$

e finalmente nella risultante da tutte queste sosti-

tuzioni vi si porranno quelli delle variabili stesse x, x', $\dot{x}$, $\dot{x}'$ dati dalle medesime quattro equazioni anzidette, si otterrà un' equazione fra α, β ed i loro differenziali, che integrata darà una equazione fra le sole α, β ed una costante arbitraria, la quale si determinerà col soddisfare le condizioni $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Quest' ultima equazione fra α, β somministri $\beta = \Delta(\alpha)$, ove $\Delta(\alpha)$ indica una funzione della α; e si avrà per equazione della strada AL, qualunque, la seguente $u = \alpha t + \Delta(\alpha)$; e conseguentemente le vie cercate saranno quelle rette, che verranno espresse dall' equazioni, che si otterranno variando la α nella $u = \alpha t + \Delta(\alpha)$.

Corollario. Se nella equazione qui trovata si fa variare la solla α, si ha

$$0 = t + \left(\frac{d\Delta}{d\alpha}\right); \text{ e però } t = -\left(\frac{d\Delta}{d\alpha}\right) \text{ ed } u = \Delta(\alpha) - \alpha\left(\frac{d\Delta}{d\alpha}\right),$$

espressioni in α delle coordinate t, u di un punto qualunque di quella linea alla quale saranno toccanti tutte le rette, che rappresenteranno le vie di trasporto: questa è una conseguenza di una notissima proprietà delle linee espresse dalle soluzioni particolari delle equazioni differenziali.

Così eliminando la α medesima dalle due equazioni $u = \alpha t + \Delta(\alpha)$, $0 = t + \left(\frac{d\Delta}{d\alpha}\right)$, si avrà l' equazione fra le coordinate rettangole t, u della linea anzidetta.

Osservazione. Non fo alcuna applicazione delle cose esposte nella proposizione qui trattata, perchè in esse non si incontrano, che difficoltà puramente

analitiche; ed in vece passo a trattare particolarmente il caso, che le linee CA, KD, GF, ML siano tante rette perpendicolari all' asse Ox, che è l' unico che presenti qualche difficoltà, volendolo trattare colla regola generale qui sopra stabilita.

Si ponga (fig. 52) $OC=a, OK=b, OG=c$, $OM=e, NO=x$, e la tangente dell' angolo fatto dalla strada LN qualunque col prolungamento dell' asse Ox si nomini ω. Ammesse queste denominazioni, si ha $AC=(a-x)\omega$. $KD=(b-x)\omega$, $GF=(c-x)\omega$, ed $ML=(e-x)\omega$; e però le aree dei quadrilateri $ACKD$, $GFLM$ saranno eguali rispettivamente ad

$$\left(\tfrac{1}{2}(a+b)-x\right)(b-a)\,\omega,\ \left(\tfrac{1}{2}(e+c)-x\right)(e-c)\,\omega.$$

Quindi, siccome queste aree debbono essere fra loro eguali, così avrà luogo l' equazione $(a-b)x+\frac{1}{2}(b^2-a^2)t=(c-e)x+\frac{1}{2}(e^2-c^2)$, la quale dà $x=\frac{1}{2}\frac{a^2-b^2+e^2-c^2}{a-b-c+e}$. Ma x esprime quella porzione dell' asse ... Ox..., che è intercetta fra l' origine ed il punto, ove l' asse stesso è segato dalla retta ... LN ...; adunque questa distanza sarà eguale alla quantità

$$\frac{1}{2}\frac{a^2-b^2+e^2-c^2}{a-b+e-c}$$

la quale per essere costante, ci insegna, che in questo caso le strade passano tutte per uno stesso punto, il quale si trova nella ... Ox ...; ed è distante

dal punto O di $\frac{1}{2}\frac{a^2-b^2+e^2-c^2}{a-b+e-c}$. Questo medesimo punto sarà distante dal punto C di

$$a-\frac{1}{2}\frac{a^2-b^2+e^2-c^2}{a-b+e-c}\text{, ossia di}$$

$$\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2+c^2+2ae-2ab-2ac-e^2}{a-b+e-c};$$

dimodochè supponendo l' origine delle coordinate in G, quest' ultima espressione si ridurrà alla seguente $\frac{1}{2}\frac{b^2+c^2-e^2}{-e+b+c}$.

Osservazione II. Se la terra a trasportarsi fosse sparsa uniformemente sul triangolo (fig. 53) ABC, e si dovesse trasportare e spargere uniformemente sull' equivalente DEF: primieramente si unirebbe la retta AE; e se risultasse il triangolo AmC maggiore dell' nEF, si determinerebbe la retta Er per modo, che risultasse $rsC=tFE$, e poi la Ax in maniera che $Avsr=Exht$, e però $AvB=Dhx$; indi si determinerebbero le vie a seguirsi per trasportare sulle figure FtE, $thxE$, hDx le terre sparse rispettivamente sulle rsC, $rsvA$, AvB mediante la regola generale esposta superiormente. Se poi risultasse la figura AmC minore della nEF, converrebbe fare pel triangolo DEF precisamente ciò, che si è fatto per l'ABC, nella ipotesi di AmC maggiore di nEF.

Sarebbe questo il luogo di fare varie riflessioni relative alle vie a seguirsi nei differenti trasporti, ed altre relative alle distribuzioni, che possono avere

le terre su entrambe le figure suddette, come pure ai contorni e dimensioni di queste medesime; ma per brevità stimo di ommetterle anch' esse insieme ad altre curiosissime proposizioni relative al trasporto delle terre, come sarebbe per esempio la seguente.

Dato il contorno dello spazio su cui è sparsa comunque la terra a trasportarsi; trovare quei punti di dato numero, od anco trovare quella linea, nei quali luoghi converrebbe raccogliere la terra, perchè la spesa del trasporto risultasse la minima. La soluzione di questa proposizione somministra delle norme vantaggiose per regolare le posizioni di certi mucchj di terra che si fanno spesse volte nelle campagne.

Proposizione ventiduesima. Problema.

Dato l' intero contorno della superficie piana orizzontale sulla quale si deve trasportare e spandere uniformemente una data massa di terra, la quale si trova già sparsa similmente al di là di una linea data nella superficie medesima; determinare l' altra linea, che insieme a quest' ultima data racchiuderà quello spazio, nel quale converrà prendere la terra a trasportarsi, volendo che la spesa del trasportamento riesca la minima.

La superficie nella quale si debba trasportare e spandere uniformemente la data massa di terra sia la $CDEFC$ (fig. 54), che è racchiuso dalle linee CDE, CFE; la linea GHL esprima quella al di là della quale si debba prendere la terra a trasportarsi; e la GNL esprima la linea cercata.

Qualunque sia per essere la linea cercata, le strade a seguirsi nel trasportamento, per la proposizione antecedente, saranno tutte toccanti di una medesima linea, la quale è anch' essa, insieme alla direzione delle strade ed alla linea GNL, incognita. Quest' ultima linea sia espressa dalla AMB, una strada qualunque dalla sua tangente rettilinea NM, e le due strade laterali estreme dalle tracce LB, GA. Così, tutte le linee indistintamente siano riferite ai due assi ortogonali Ox, Oy; e siano NT, HS, DR, FQ, MP le ordinate corrispondenti ai segamenti N, H, D, F, ed al contatto M.

Si ponga $OP=x, PM=y; OQ=t, QF=u(t)=u$; $OR=\alpha$, $RD=\beta(\alpha)=\beta$; $OS=r$, $SH=z(r)=z$; $OT=\dot{x}$, ed $NT=\dot{y}$; e si nomini ω l'angolo compreso dalle GA, NM, cioè l'angolo compreso dalla strada laterale GA e dalla NM qualunque. Più, si intendano le masse di terra espresse colle aree delle superficie sulle quali sono esse medesime sparse uniformemente.

Evidentemente, le aree DFC, NHG verranno espresse dagli integrali

$$\tfrac{1}{2}\int\left(\overline{DM}^2-\overline{FM}^2\right)d\omega\,,\quad \tfrac{1}{2}\int\left(\overline{NM}^2-\overline{HM}^2\right)d\omega$$

estesi da $\omega=0$ sino ad ω stesso; e però, siccome queste aree debbono essere fra loro eguali, qualunque sia l' ω, così si avrà l' equazione indefinita

$$\overline{NM}^2+\overline{FM}^2-\overline{DM}^2-\overline{HM}^2=0;$$

più l' integrale $\tfrac{1}{2}\int\left(\overline{NM}^2-\overline{HM}^2\right)d\omega$ esteso da

$\omega = 0$ sino ad ω eguale all' angolo compreso dalle due strade laterali LB, GA, indicando l' intera massa di terra a trasportarsi, dovrà essere eguale all' area dello spazio $CDEFC$, la quale è per ipotesi data e costante.

Similmente, siccome la derivata rispetto all' ω della spesa del trasporto di qualunque porzione DFC è espressa dalla quantità

$$\tfrac{1}{3}\left(\overline{NM}^3 + \overline{FM}^3 - \overline{DM}^3 - \overline{HM}^3\right);$$

così la quantità, che dovrà essere un minimo, sarà l' integrale

$$\tfrac{1}{3}\int\left(\overline{NM}^3 + \overline{FM}^3 - \overline{DM}^3 - \overline{HM}^3\right) d\omega$$

esteso dall' $\omega = 0$ sino ad ω eguale all' angolo compreso dalle strade laterali estreme.

Per tanto la quistione proposta si riduce a trovare quella linea GNL per cui sia minimo l' integrale definito

$\tfrac{1}{3}\int\left(\overline{NM}^3 + \overline{FM}^3 - \overline{DM}^3 - \overline{HM}^3\right) d\omega$ anzidetto, e nel medesimo tempo sia costante l' altro

$\tfrac{1}{2}\int\left(\overline{NM}^2 - \overline{HM}^2\right) d\omega$ preso fra gli stessi limiti; più sussista l' equazione indefinita

$$\overline{NM}^2 + \overline{FM}^2 - \overline{DM}^2 - \overline{HM}^2 = 0$$

qualunque sia il punto M, ossia qualunque sia la variabile x: questa variabile nel seguito si terrà per la principale; e le derivate $\left(\frac{df}{dx}\right)$, $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right)$ rispetto ad essa, di qualunque quantità f, si indicheranno per semplicità colle f', f''.

Posto per semplicità $1+y'^2=s'^2$; si avrà $MN=(x-\dot{x})\,s'$, $MH=(x-r)\,s'$, $MD=(x-\alpha)\,s'$,

$$MF=(x-t)\,s', \quad \text{e} \quad d\omega=-\frac{y''dx}{s'^2};$$

e però $\quad \overline{NM}^2+\overline{FM}^2-\overline{DM}^2-\overline{HM}^2$

$$=\left(\dot{x}^2+t^2-\alpha^2-r^2+2(\alpha+r-\dot{x}-t)\,x\right)s'^2=0, \text{ ossia}$$

$$\dot{x}^2+t^2-\alpha^2-r^2+2\,(\alpha+r-\dot{x}\,t)\,x=0; \text{ ed}$$

$$\tfrac{1}{2}\int\left(\overline{NM}^2-\overline{HM}^2\right)d\omega=\tfrac{1}{2}\int\left(r^2-\dot{x}^2+2x(\dot{x}-r)\right)y''dx, \text{ ed}$$

$$\tfrac{1}{3}\int\left(\overline{NM}^3+\overline{FM}^3-\overline{DM}^3-\overline{HM}^3\right)d\omega$$

$$=\tfrac{1}{3}\int\left(\dot{x}^3+t^3-\alpha^3-r^3+3\,(\alpha+r-t-\dot{x})x^2\right)y''s'dx:$$

dove le t, α, r sono funzioni delle x, y, y', che si debbano determinare colle equazioni

$$u(t)-y-y'(t-x)=0, \quad \beta(\alpha)-y-y'(\alpha-x)=0,$$
$$z(r)-y-y'(r-x)=0.$$

Quindi, posto pure per semplicità y' ossia $\left(\frac{dy}{dx}\right)=a$, ed indicate colle λ, μ, ξ, π, δ cinque indeterminate variabili, e colla c una costante arbitraria; onde soddisfare la proposta proposizione si dovranno determinare le α, t, r, $\dot{x}$, y, ed a, considerate come funzioni della stessa x, per modo, che riesca un minimo l' integrale di

$$\tfrac{1}{3}\left(\dot{x}^3+t^3-\alpha^3-r^3+3x^2\,(\alpha+r-t-\dot{x})\right)a'\sqrt{1+a^2}$$
$$-\frac{c}{2}\left(r^2-\dot{x}^2+2x\,(\dot{x}-r)\right)a'+\mu\left(u(t)-y-a\,(t-x)\right)$$

$$+\xi\Big(\beta(\alpha)-y-a(\alpha-x)\Big)+\pi\Big(z(r)-y-a(r-x)\Big)$$

$$+\lambda\Big(\dot{x}^2+t^2-\alpha^2-r^2+2x(\alpha+r-t-\dot{x})\Big)+\delta(a-y')$$

rispetto alla x, esteso da $\alpha=0$ sino ad ω eguale all' angolo compreso dalle due strade AG, BL laterali.

Facendo variare separátamente le sei funzioni α, t, r, $\dot{x}$, y, ed a come indipendenti, le note regole del calcolo delle variazioni, somministrano per la determinazione di esse ordinatamente le equazioni che seguono

$$(x^2-\alpha^2)\,a'\sqrt{1+a^2}+2\lambda(x-\alpha)+\xi\Big(\beta'(\alpha)-a\Big)=0,$$

$$(t^2-x^2)\,a'\sqrt{1+a^2}+2\lambda(t-x)+\mu\Big(u'(t)-a\Big)=0,$$

$$(x^2-r^2)\,a'\sqrt{1+a^2}+2\lambda(x-r)+\pi\Big(z'(r)-a\Big)+c\,a'(x-r)=0,$$

$$(\dot{x}^2-x^2)\,a'\sqrt{1+a^2}+2\lambda(\dot{x}-x)+c\,a'(\dot{x}-x)=0,$$

$$\mu+\xi+\pi-\delta'=0,$$

$$A'\sqrt{1+a^2}+B'+\mu(t-x)+\xi(\alpha-x)+\pi(r-x)-\delta=0:$$

dove A', B' indicono le derivate prese rispetto alla x delle funzioni

$$\tfrac{1}{3}\Big(\dot{x}^3+t^3-\alpha^3-r^3+3x^2(\alpha+r-\dot{x}-t)\Big),\ -\tfrac{1}{2}c\Big(r^2-\dot{x}^2+2x(\dot{x}-r)\Big);$$

e le $\beta'(\alpha)$, $u'(t)$, $z'(r)$
quelle delle $\beta(\alpha)$, $u(t)$, $z(r)$
prese rispettivamente rapporto alle α, t, r.

La quarta di queste equazioni somministra

$$2\lambda=-a'\Big(c+(x+\dot{x})\,s'\Big).$$

Sostituendo questo valore di 2λ nelle prime tre, esse si riducono alle

$$a'(x-r)\Big((\alpha-\dot{x})s'-c\Big)+\xi\Big(\beta'(\alpha)-a\Big)=0,$$

$$a'(t-x)\Big((t-\dot{x})s'-c\Big)+\mu\Big(u'(t)-a\Big)=0,$$

$$a's'(x-r)(r-\dot{x})+\pi\Big(z'(r)-a\Big)=0.$$

Ma le equazioni $\beta(\alpha)-y-a(\alpha-x)=0$, $u(t)-y-a(t-x)=0$, $z(r)-y-a(r-x)=0$ danno per $\beta'(\alpha)-a$, $u'(t)-a$, $z'(r)-a$ i valori $\frac{a'}{\alpha'}(\alpha-x)$, $\frac{a'}{t'}(t-x)$, $\frac{a'}{r'}(r-x)$, i quali sostituiti nelle ultime tre equazioni qui trovate, le riducono ad altre, dalle quali si cava

$$\xi=-\alpha'\Big(c-(\alpha-\dot{x})s'\Big),\ \mu=t'\Big(c-(t-\dot{x})s'\Big), \text{ e } \pi=-r'(\dot{x}-r)s'.$$

Ponendo questi valori di ξ, μ, π nella quinta e sesta delle equazioni primitive, essi riducono le medesime alle

$$\delta'=-c\alpha'+ct'+s'\Big((\alpha-\dot{x})\alpha'-(t-\dot{x})t'+(r-\dot{x})r'\Big)$$

$$\delta=\Big(A'-(t-x)(t-\dot{x})t'+(\alpha-x)(\alpha-\dot{x})\alpha'+(r-x)(r-\dot{x})r'\Big)s'$$
$$+B'+c\Big((t-x)t'-(\alpha-x)\alpha'\Big);$$

ma sostituendo in quest' ultima in luogo di A' e B' i rispettivi loro valori

$$(\dot{x}-x)^2(1-\dot{x}')+(t-x)^2(1-t')-(\alpha-x)^2(1-\alpha')-(r-x)^2(1-r'),$$
$$-c\Big(rr'-\dot{x}\dot{x}'+\dot{x}-r+x(\dot{x}'-r')\Big),$$

ed osservando, che l' equazione indefinita

$$\dot{x}^2 + t^2 - \alpha^2 - r^2 + 2x(\alpha + r - \dot{x} - t) = 0 \quad \text{dà}$$

$$\dot{x}\dot{x}' + tt' - \alpha\alpha' - rr' + \alpha + r - \dot{x} - t + (\alpha' + r' - \dot{x}' - t')x = 0,$$

essa si riduce alla $(\dot{x}-x)(\dot{x}+t-\alpha-r)s' + (t-\alpha)c - \delta = 0$,

la quale somministra $\delta' = c(t'-\alpha')(1-\dot{x}')(\dot{x}+t-\alpha-r)s'$

$$-(x-\dot{x})(\dot{x}'+t'-\alpha'-r')s' - (x-\dot{x})(\dot{x}+t-\alpha-r)s''$$

Quindi, eguagliando fra loro i valori della δ', che danno queste ultime due equazioni, alle quali si sono ridotte la quinta e la sesta delle suddette, si otterrà la sola

$$-(1-\dot{x}')(\dot{x}+t-\alpha-r)s' - (x-\dot{x})(\dot{x}'+t'-\alpha'-r')s' - (x-\dot{x})(\dot{x}+t-\alpha-r)s''$$

$$+s'\Big((t-\dot{x})t' - (\alpha-\dot{x})\alpha' - (r-\dot{x})r'\Big) = 0, \text{ ossia}$$

$$\Big(-(1-\dot{x}')(\dot{x}+t-\alpha-r) - (x-\dot{x})(\dot{x}'+t'-\alpha'-r') + (t-x)t' - (\alpha-\dot{x})\alpha' - (r-\dot{x})r'\Big)s'$$

$$-(x-\dot{x})(\dot{x}+t-\alpha-r)s'' = 0$$

nella quale non avvi nessuna delle indeterminate $\xi, \pi, \lambda, \delta, \mu$.

Finalmente quest' ultima equazione, mediante la stessa derivata della $\dot{x}^2+t^2-\alpha^2-r^2+2(\alpha+r-\dot{x}-t)x=0$, si riduce alla $-(x-\dot{x})(t+\dot{x}-\alpha-r)s''+\dot{x}'(t+\dot{x}-\alpha-r)s'=0$; e conseguentemente a quest' altra semplicissima

$$(x-\dot{x})s'' - \dot{x}'s' = 0,$$

il cui primo membro è la derivata prima esatta rispetto alla x della funzione $(x-\dot{x})s's$; e però si avrà

$$(x-\dot{x})s' - s = e;$$

ove la e indica una costante.

Combinando questa equazione trovata, ovvero la sua equivalente $(x-\dot{x})\sqrt{1+y'^2}=e+s$, alla $MN=(x-\dot{x})s'=(x-\dot{x})\sqrt{1+y'^2}$, esposta nel principio di questa soluzione, si ottiene $MN=e+s$: equazione che significa, che la linea cercata GNL dev' essere una sviluppante della AMB, ossia una di quelle alle quali sono normali tutte le strade a seguirsi nel trasporto.

Ora sostituendo nella equazione indefinita

$$(x-\dot{x})^2+(x-t)^2-(\alpha-x)^2-(r-x)^2=0$$

in luogo della differenza $x-\dot{x}$ il suo valore trovato, cioè $\frac{e+s}{s'}$, si ottiene la

$$\frac{(e+s)^2}{s'^2}+(t-x)^2-(\alpha-x)^2-(r-x)^2=0,$$

della quale eliminate le t, α, ed r colle tre altre equazioni

$$u(t)-y-y'(t-x)=0,\quad \beta(\alpha)-y-y'(\alpha-x)=0,$$
$$z(r)-y-y'(r-x)=0,$$

si avrà nna sola eqnazione fra le quantità x, y, y', ed $s=\int dx\sqrt{1+y'^2}$, che integrata opportunamente, farà conoscere la sviluppata AMB, e la sua sviluppante GNL, che è la linea cercata;

giacchè si ha $\dot{x}=x-\frac{e+s}{\sqrt{(1+y'^2)}}$, ed $\dot{y}=y-\frac{e+s}{\sqrt{(1+y'^2)}}y'$; ed anco le rette indicanti le strade da seguirsi nel trasportamento di cui si parla, stantechè la MN, che indica una qualunque di esse strade, ha per equazione

$$q=y'p+y-xy';$$

dove p, q esprimono l'ascissa e l'ordinata corrispondente di un punto qualunque della medesima retta.

Se si volesse immediatamente l'equazione della linea GNL cercata, basterebbe porre nella

$$\dot{x}^2+t^2-\alpha^2-r^2+2(\alpha+r-\dot{x}-t)x=0$$

in luogo delle ascisse x il suo valore

$$\dot{x}-\left\{1+\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)^2\right\}\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right):\left(\frac{d^2\dot{y}}{d^2\dot{x}^2}\right),$$

il quale si desume facilmente dalle equazioni anzi esposte $\dot{x}=x-\frac{e-s}{s'}$, $\dot{y}=y-\frac{e-s}{s'}y'$; giacchè si otterrebbe per equazione differenziale della linea cercata la seguente

$$\left(2\dot{x}-\frac{\dot{x}^2+t^2-\alpha^2-r^2}{\dot{x}+t-\alpha-r}\right)\left(\frac{d^2\dot{y}}{d\dot{x}^2}\right)-2\left(1+\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)^2\right)\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)=0:$$

nella quale t, α, ed r sono funzioni delle $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)$ date dalle equazioni

$$\left(u(t)-\dot{y}\right)\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)+t-\dot{x}=0,\ \left(\beta(\alpha)-\dot{y}\right)\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)+\alpha-\dot{x}=0,$$

$\left(z(r)-\dot{y}\right)\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)+r-\dot{x}=0$, che si ottengono cambiando nella $(q-\dot{y})\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)+p-\dot{x}=0$, equazione della normale alla linea stessa cercata, le coordinate p, q rispettivamente nelle analoghe dei punti F, D e H.

Le costanti introdotte dalle integrazioni si determineranno in maniera, che le strade laterali risul-

tino come tangenti lo spazio nel quale trovasi sparsa uniformemente la terra a trasportarsi, o meglio che esse passino una pel punto C e l' altra pell' E. Onde si vegga la via da seguirsi in questa ricerca, colla quale si darà compimento alla proposizione di cui trattasi, si esprima colla $\dot{y} = \phi(\dot{x}, f, g)$ l' integrale dell' ultima equazione differenziale, ove f, g sono le due costanti; colle $\dot{r}, \ddot{r}$ le ascisse dei punti G, L comuni a questa linea ed alla GHL; colle $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ quelle dei C, ed E dati.

Evidentemente dovranno aver luogo le quattro equazioni

$$z(\dot{r}) = \phi(\dot{r}, f, g)\,,\ z(\ddot{r}) = \phi(\ddot{r}, f, g),$$

$$\left(\dot{\beta} - z(\dot{r})\right)\psi(\dot{r}) + \dot{\alpha} - \dot{r} = 0,$$

$$\left(\ddot{\beta} - z(\ddot{r})\right)\psi(\ddot{r}) + \ddot{\alpha} - \ddot{r} = 0,$$

dove $\psi(\dot{r}), \psi(\ddot{r})$ indicono i risultamenti, che si hanno, facendo successivamente $x = \dot{r}, = \ddot{r}$ nella derivata $\left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}}\right)$, e le $\dot{\beta}$, $\ddot{\beta}$ esprimono le ordinate dei punti E, C. Con queste quattro equazioni si potranno determinare le quantità $\dot{r}, \ddot{r}, f, g$. Che se le linee CDE, CFE fossero parti di una medesima, per esempio, della CDE, per cui le ascisse $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}$ sarebbero anch' esse incognite, bisognerebbe combinare alle qui esposte quattro equazioni le altre quattro seguenti $\dot{\beta} = \beta(\dot{\alpha})$, $\ddot{\beta} = \beta(\ddot{\alpha})$,

$$\psi(\dot{r})\left(\frac{d\beta(\dot{\alpha})}{d\dot{\alpha}}\right) + 1 = 0,\ \psi(\ddot{r})\left(\frac{d\beta(\ddot{\alpha})}{d\ddot{\alpha}}\right) + 1 = 0.$$

Vi sarebbero altri casi a contemplarsi, ma bastino gli esposti.

Osservazione. Se fossero date le sole linee GHL, CDE, e si dovesse trasportare e spandere uniformemente della terra da una banda della CDE, per esempio, dalla banda del punto M attuale; e che si dovesse prendere la medesima della parte opposta della GHL, cioè verso y, ove fosse sparsa similmente, e si cercassero le due linee GNL, CFE, affinchè il trasporto di una data massa di terra costasse il minimo, la quantità a rendersi minima, fra i limiti di $\omega = 0$ ad ω eguale all' angolo compreso fra le due strade laterali, sarebbe la stessa considerata sopra, senza quel termine nel quale vi è il fattore μ; per cui per la determinazione delle funzioni $\alpha, t, r, \dot{x}, y$, ed a si avrebbero le stesse sei equazioni superiormente trovate, mancanti però di quei termini, che sono affetti dalla stessa indeterminata μ.

La seconda di queste equazioni risulta

$$(x^2 - t^2)\, d's' - 2\lambda(x - t) = 0,$$

la quale dà $\quad 2\lambda = (x + t)\, d's'$;

ma siccome la quarta di esse sarebbe identica alla quarta delle sopra esposte, per cni

$$2\lambda = (x + \dot{x})\, d's' - c\, d';$$

così si avrebbe

$(x + t) d's' = (x + \dot{x}) d's' - c\,d'$, ossia $(t - \dot{x}) s' = -c$.

Ma evidentemente si ha $(t - \dot{x}) s' = NF$; qnindi la FN risultando egnale alla c sarebbe costante; e conseguentemente le due linee cercate sarebbero fra loro parallele, ossia sarebbero due sviluppanti od evolventi di una stessa linea, ed aventi l' una dall' altra una distanza eguale alla costante c.

La equazione della GNL si avrebbe, integrando l' equazione risultante dalla eliminazione delle t, α, ed r dalla tre equazioni

$$\alpha - \dot{x} + \left(\beta(\alpha) - \dot{y} \right) \left(\frac{d\dot{y}'}{d\dot{x}} \right) = 0,$$

$$r - \dot{x} + \left(z(r) - \dot{y} \right) \left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} \right) = 0,$$

$$\left(2\dot{x} - \frac{x^2 + t^2 - \alpha^2 - r^2}{x + t - \alpha - r} \right) \left(\frac{d^2\dot{y}}{d\dot{x}^2} \right) - 2\left\{ 1 + \left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} \right)^2 \right\} \left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} \right) = 0$$

combinate colla $t = \dot{x} + c \left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} \right) : \sqrt{1 + \left(\frac{d\dot{y}}{dx} \right)^2}$

somministrata dal parallelismo delle CFE, GNL; come si può vedere nella proposizione prima della mia memoria sulle linea e superficie parallele inserita nel tomo sedicesimo della società Italiana delle scienze, e come di leggeri si può anco verificare.

Trovata l' equazione della linea GNL, si avrà quella della CFE, colla eliminazione della $\dot{x}$ dalle due equazioni

$$t = \dot{x} + c \left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} \right) : \sqrt{1 + \left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} \right)^2},$$

$$u = \dot{y} - c : \sqrt{1 + \left(\frac{d\dot{y}}{d\dot{x}} \right)^2}:$$

come risulta dalla memoria anzi citata.

Corollario. Se la terra sparsa, come sopra, su di una determinata figura si dovesse trasportare e spandere similmente sopra una porzione di data estensione

di essa figura, affinchè la spesa del trasporto riescisse la minima, la linea a determinarsi, che dovrebbe circoscrivere questa porzione o separarla dalla rimanente dovrebbe consistere in quella sviluppata della linea a cui dovrebbero esser tangenti le vie di trasporto, ovvero in quella composta di più sviluppate consimili, la quale racchiudesse uno spazio di una estensione eguale alla data.

Proposizione ventitreesima. PROBLEMA.

Si debbano trasportare e spandere uniformemente sugli spazi $b'c'd'$, $e'd'f'$ (fig 55) circoscritti dalle linee conosciute $b'Lc'$, $d'Uc'$, $e'Fd'$, $d'Gf'$ due date masse di una stessa specie di terra, la quale si trovi sparsa già similmente al di là della linea .. $\alpha v \beta$ .. pure data: si cerca la linea vMt.. che dovrà separare quei due spazi .. tMv .., .. tMv .. dai quali si dovranno prendere rispettivamente le due suddette masse di terra; affinchè, secondo il solito, la spesa totale del trasportamento e spargimento insieme di essa, riesca la minima.

Siano tB, vA, tC, vD le direzioni delle strade laterali estreme che si dovranno seguire nel trasportamento di quella terra che è da una banda circoscritta dalla linea .. tMv cercata; e le Mm, Mn ne indichino le direzioni di due qualsivogliano; cioè la Mm indichi la direzione di una qualunque di quelle strade che si debbano percorrere nel trasportare sullo spazio $b'c'd'$ la terra sparsa sullo $tMvr$; ed Mn l' analoga pel trasporto della terra sparsa sopra $tMrs$ sulla superficie $e'd'f'$.

Per la proposizione penultima le strade vA, Mm, tB dovranno essere tangenti ad una linea AmB; e le vD, Mn, tc ad un'altra DnC; vale a dire quelle dirette allo spazio $b'c'a'$ tangenti alla stessa linea AmB, e quelle dirette all'altro $e'd'f'$ in generale tangente ad un'altra DnC.

Siano tirate, dai punti n, m di contatto, e dagli M, H, E, L, U, F, e G segamenti, le $nV, mT, MS, HQ, ER, LI, UN, FP, GK$ perpendicolari alla Or, ed anco la Oy anch'essa perpendicolare alla medesima Ox; e si suppongano, sì le linee conosciute $\alpha v\beta$, $b'Lc'$, $d'Ud'$, $e'Fd'$, $d'Gf'$ che le vMt, DnC, AmB, non conosciute, tutte riferite ai medesimi due assi Ox, Oy; e si ponga per semplicità

$$OT = x,\ Tm = y;\ OQ = r,\ QH = z(r) = z;$$

$$OI = \alpha,\ IL = \beta(\alpha) = \beta;\ ON = t,\ NU = u(t) = u;$$

$$OS = \dot{x},\ SM = \dot{y};\ OV = x_{.},\ Vn = y_{.};$$

$$OR = \dot{r},\ RE = \dot{z}(\dot{r}) = \dot{z};\ OP = \dot{\alpha},\ PF = \dot{\beta}(\dot{\alpha}) = \dot{\beta};$$

$$OK = \dot{t},\ KG = \dot{u}(\dot{t}) = \dot{u};$$

più si nomini ω l'angolo compreso dalle $Av\,Mm$, ed $\dot{\omega}$ quello compreso dalle Dv, Mn; in fine $s e$ gli archi Am, Dn.

Egli è facile a concepirsi, che la curva cercata sarà quella per la quale sarà minima la somma degli integrali

$$\tfrac{1}{3}\int\left(\overline{mM}^3 + \overline{mU}^3 - \overline{mL}^3 - \overline{mH}^3\right) d\omega,$$

$$\tfrac{1}{3}\int\left(\overline{nM}^3 + \overline{nG}^3 - \overline{nF}^3 - \overline{nE}^3\right) d\dot{\omega}$$

estesi, il primo da $\omega=0$ sino ad ω eguale all' angolo compreso dalle Av, Bt, ed il secondo da $\dot{\omega}=0$ sino ad ω eguale all' angolo compreso dalle Dv, Ct; fra quelle linee per cui hanno valori costanti entrambi gli integrali

$$\tfrac{1}{2}\int\left(\overline{mM}^2-\overline{mH}^2\right)d\omega\,,\ \tfrac{1}{2}\int\left(\overline{nM}^2-\overline{nE}^2\right)d\dot{\omega}$$

estesi rispettivamente fra gli stessi limiti dei due antecedenti; e che nel medesimo tempo soddisfanno le due equazioni seguenti

$$\overline{mM}^2+\overline{mU}^2-\overline{mL}^2-\overline{mH}^2=0\,,$$

$$\overline{nM}^2+\overline{nG}^2-\overline{nF}^2-\overline{nE}^2=0$$

volute dalla natura delle strade o del trasportamento.

Essendo $mM=(x-\dot{x})\left(\frac{ds}{dx}\right)$, $mH=(x-r)\left(\frac{ds}{dx}\right)$,

$mL=(x-\alpha)\left(\frac{ds}{dx}\right)$, $mU=(x-t)\left(\frac{ds}{dx}\right)$, $nM=(x-\dot{\alpha})\left(\frac{d\theta}{d\dot{x}}\right)$,

$nE=(x-\dot{r})\left(\frac{d\theta}{d\dot{x}}\right)$, $nF=(x-\dot{x})\left(\frac{d\theta}{d\dot{x}}\right)$, $nG=(x-\dot{t})\left(\frac{d\theta}{d\dot{x}}\right)$,

le due equazioni, qui esposte, si ridurranno alle

$$t^2+\dot{x}^2-\alpha^2-r^2-2x(t+\dot{x}-\alpha-r)=0\,,$$

$$\dot{t}^2+\dot{x}^2-\dot{\alpha}^2-\dot{r}^2-2\dot{x}(\dot{t}+\dot{x}-\dot{\alpha}-\dot{r})=0\,,$$

gli integrali definiti, che debbono essere costanti, agli

$$\tfrac{1}{2}\int\left(r^2-\dot{x}^2-2x(r-\dot{x})\right)\left(\frac{ds}{dx}\right)^2d\omega\,,$$

$$\tfrac{1}{2}\int\left(\dot{r}^2-\dot{x}^2-2\dot{x}(\dot{r}-\dot{x})\right)\left(\frac{d\theta}{d\dot{x}}\right)^2d\dot{\omega}\,,$$

e quella somma che dev' essere un minimo alla

$$\tfrac{1}{3}\int\left(t^3+\dot{x}^3-\alpha^3-r^3-3x^2(t+\dot{x}-\alpha-r)\right)\left(\frac{ds}{dx}\right)^3 d\omega$$
$$+\tfrac{1}{3}\int\left(\dot{t}^3+\dot{x}^3-\dot{\alpha}^3-\dot{r}^3-3\underset{\cdot}{x}^2(\dot{t}+\dot{x}-\dot{\alpha}-\dot{r})\right)\left(\frac{d\theta}{d\underset{\cdot}{x}}\right)^3 d\dot{\omega}.$$

Onde rendere più semplici i calcoli, si riportino tanto gli integrali, quanto i differenziali alla sola variabile x; e si indichino le derivate

$$\left(\frac{dy}{dx}\right),\ \left(\frac{d\underset{\cdot}{y}}{dx}\right),\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ \left(\frac{d^2\underset{\cdot}{y}}{dx^2}\right),\ \left(\frac{ds}{dx}\right),\ \left(\frac{d\theta}{dx}\right),\ \text{ec.}$$

coi soliti simboli Lagrangiani $y', \underset{\cdot}{y}', y'', \underset{\cdot}{y}'', s', \theta'$ ec.; più si osservi, che $d\omega$, $d\dot{\omega}$, $\left(\frac{d\theta}{d\underset{\cdot}{x}}\right)$ sono eguali rispettivamente alle $+\frac{a'}{\underset{\cdot}{s}^2}dx$, $-\frac{\underset{\cdot}{x}'^2c'}{\theta'^2}dx$, $\frac{\theta'}{\underset{\cdot}{x}'}$, purchè si ponga $\left(\frac{dy}{dx}\right)=a$, e $\left(\frac{d\underset{\cdot}{y}}{d\underset{\cdot}{x}}\right)$ ossia $\frac{\underset{\cdot}{y}}{\underset{\cdot}{x}}=c$;

ed i tre integrali definiti suddetti, si ridurranno ai tre seguenti

$$-\tfrac{1}{2}\int\left(\dot{x}^2-r^2+2x(r-\dot{x})\right)a'dx,$$
$$\tfrac{1}{2}\int\left(\dot{x}^2-\dot{r}^2+2\underset{\cdot}{x}(\dot{r}-\dot{x})\right)c'dx,$$
$$-\tfrac{1}{3}\int\Big[\left(\alpha^3+r^3-t^3-\dot{x}^3+3x^2(t+\dot{x}-\alpha-r)\right)a'\sqrt{(1+a^2)}$$
$$+\left(\dot{r}^3+\dot{x}^3-\dot{t}^3-\dot{x}^3+3\underset{\cdot}{x}(\dot{t}+\dot{x}-\dot{r}-\dot{\alpha})\right)c'\sqrt{(1+c^2)}\Big]dx,$$

i primi dei quali debbono essere costanti, ed il terzo minimo; e tutti estesi da x eguale alla ascissa corrispondente al punto di contatto A sino a quella che corrisponde al punto B pure di contatto.

Le undici variabili $x, \underset{\cdot}{x}, \alpha, r, t, \dot{\alpha}, \dot{r}, \dot{t}, \dot{x}, a, c$, che entrano nei tre integrali qui esposti, dovranno soddisfare le undici equazioni

$$\dot{x}^2 + t^2 - \alpha^2 - r^2 + 2x\,(r + \alpha - t - \dot{x}) = 0\,,$$

$$\dot{x}^2 + \dot{t}^2 - \dot{\alpha}^2 - \dot{r}^2 + 2\underset{\cdot}{x}\,(\dot{r} + \dot{\alpha} - \dot{t} - \dot{x}) = 0\,,$$

$$u(t) - y - a\,(t - x) = 0\,, \quad \beta(\alpha) - y - a\,(\alpha - x) = 0\,,$$

$$z(r) - y - a\,(r - x) = 0\,, \quad a - y' = 0\,,$$

$$\dot{u}(\dot{t}) - \underset{\cdot}{y} - c(\dot{t} - \underset{\cdot}{x}) = 0,\ \dot{\beta}(\dot{\alpha}) - \underset{\cdot}{y} - c(\dot{\alpha} - \underset{\cdot}{x}) = 0,\ \dot{z}(\dot{r}) - \underset{\cdot}{y} - c(\dot{r} - \underset{\cdot}{x}) = 0,$$

$$c\,\underset{\cdot}{x}' - \underset{\cdot}{y}' = 0\,,\ y - \underset{\cdot}{y} - a\,x + c\,\underset{\cdot}{x} + (a - c)\,\dot{x} = 0\,,$$

di cui le prime dieci sono evidenti, e l' ultima esprime, che il punto M della linea cercata dev' essere nelle tangenti o vie corrispondenti $m\,U$, $n\,G$. Quindi indicate colle m, n due costanti arbitrarie, e colle (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11) undici indeterminate variabili, per soddisfare la proposta proposizione si dovranno determinare le variabili $y, \underset{\cdot}{y}, \dot{\alpha}, t, \dot{t}, r, \dot{r}, \dot{x}, \underset{\cdot}{x}, a$ insieme alla c, in modo, che risulti minimo l' integrale della quantità seguente

$$- \tfrac{1}{3}\left(\alpha^3 + r^3 - t^3 - \dot{x}^3 + 3\,x^2\,(t + \dot{x} - \alpha - r)\right) a' \sqrt{(1 + a^2)}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\dot{\alpha}^3 + \dot{r}^3 - \dot{t}^3 - \dot{x}^3 + 3\,\underset{\cdot}{x}^2\,(\dot{t} + \dot{x} - \dot{\alpha} - \dot{r})\right) c' \sqrt{(1 + c^2)}$$

$$+ \frac{m}{2}\left(r^2 - \dot{x}^2 + 2x\,(\dot{x} - r)\right) a' - \frac{n}{2}\left(\dot{r}^2 - \dot{x}^2 + 2\,\underset{\cdot}{x}\,(\dot{x} - \dot{r})\right) c'$$

$$- (1)\left(\dot{x}^2 + t^2 - \alpha^2 - r^2 + 2\,x\,(r + \alpha - \dot{x} - t)\right) +$$

$$+(2)\left(\dot{x}^2+\dot{t}^2-\dot{\alpha}^2-\dot{r}^2+2\underset{\cdot}{x}(\dot{r}+\dot{\alpha}-\dot{x}-\dot{t})\right)$$

$$+(3)\left(u(t)-y-a(t-x)\right)+(4)\left(\beta(\alpha)-y-a(\alpha-x)\right)+$$

$$+(5)\left(z(r)-y-a(r-x)\right)+(6)\left(a-y'\right)$$

$$+(7)\left(\dot{u}(\dot{t})-\underset{\cdot}{y}-c(\dot{t}-\underset{\cdot}{x})\right)+(8)\left)\dot{\beta}(\dot{x})-\underset{\cdot}{y}-c(\dot{\alpha}-\underset{\cdot}{x})\right)+$$

$$+(9)\left(z(\dot{r})-\underset{\cdot}{y}-c(\dot{r}-\underset{\cdot}{x})\right)+(10)\left(c\underset{\cdot}{x}'-\underset{\cdot}{y}'\right)$$

$$+(11)\left(y-\underset{\cdot}{y}-ax+c\underset{\cdot}{x}+(a-c)\dot{x}\right)$$

rispetto alla x, ed esteso fra i suddetti valori della x medesima, che sono le ascisse corrispondenti ai punti dei contatti A, B.

Il calcolo delle variazioni somministra per la determinazione delle dodici variabili anzidette, cioè delle y, $\underset{\cdot}{y}$, α, $\dot{\alpha}$, t, $\dot{t}$, r, $\dot{r}$, $\dot{x}$, $\underset{\cdot}{x}$, a, c rispettivamente le dodici equazioni seguenti

$$(3)+(4)+(5)-(11)-(6)'=0,\quad (7)+(8)+(9)+(11)-(10)'=0,$$

$$-(\alpha^2-x^2)a'\sqrt{1+a^2}+2(1)(\alpha-x)+(4)\left(\beta'(\alpha)-a\right)=0,$$

$$(\dot{\alpha}^2-\underset{\cdot}{x}^2)\,c'\sqrt{1+c^2}-2(2)(\dot{\alpha}-\underset{\cdot}{x})+(8)\left(\dot{\beta}'(\dot{\alpha})-c\right)=0,$$

$$-(x^2-t^2)a'\sqrt{1+a^2}-2(1)(t-x)+(3)\left(u'(t)-a\right)=0,$$

$$(\underset{\cdot}{x}^2-\dot{t}^2)\,c'\sqrt{1+c^2}+2(2)(\dot{t}-\underset{\cdot}{x})+(7)\left(\dot{u}'(\dot{t})-c\right)=0,$$

$$-(r^2-x^2)a'\sqrt{1+a^2}+m(r-x)a'-2(1)(x-r)+(5)\left(z'(r)-a\right)=0,$$

$$(\dot{r}^2-\underset{\cdot}{x}^2)c'\sqrt{1+c^2}-n(\dot{r}-\underset{\cdot}{x})c'+2(2)(\underset{\cdot}{x}-\dot{r})+(9)\left(z'(\dot{r})-c\right)=0,$$

$$-(x^2-\dot{x}^2)\,a'\sqrt{1+a^2}+m\,(x-\dot{x})\,a'-2\,(1)\,(\dot{x}-x)$$

$$+(\underset{\cdot}{x}^2-\dot{x}^2)\,c'\sqrt{1+c^2}-n\,(\underset{\cdot}{x}-\dot{x})\,c'+2\,(2)\,(\dot{x}-\underset{\cdot}{x})+(11)\,(a-c)=0$$

$$2\,\underset{\cdot}{x}\,(\iota+\dot{x}-\dot{\alpha}-\dot{r})\,c'\sqrt{1+c^2}-n\,(\dot{x}-\dot{r})\,c'+2\,(2)\,(\dot{r}+\dot{\alpha}-\dot{\iota}-\dot{x})$$

$$+c\big((7)+(8)+(9)+(11)\big)-\big[c\,(10)\big]'=0,$$

$$-A\,\frac{a\,a'}{\sqrt{(1+a^2)}}-(3)\,(\iota-x)-(4)\,(\alpha-x)-(5)\,(r-x)$$

$$+(6)-(11)\,x+(11)\,\dot{x}+\big[A\sqrt{(1+a^2)}+B\big]'=0,$$

$$\dot{A}\,\frac{c\,c'}{\sqrt{(1+c^2)}}-(7)\,(\dot{\iota}-\underset{\cdot}{x})-(8)\,(\dot{\alpha}-\underset{\cdot}{x})-(9)\,(\dot{r}-\underset{\cdot}{x})$$

$$+(10)\,\underset{\cdot}{x}'+(11)\,\underset{\cdot}{x}-(11)\,\dot{x}-\big[\dot{A}\sqrt{1+c^2}-\dot{B}\big]'=0;$$

dove A, B, $\dot{A}$, $\dot{B}$ indicano le quantità

$$\tfrac{1}{3}\big(\alpha^3+r^3-\iota^3-\dot{x}^3+3\,x^2\,(\iota+\dot{x}-\alpha-r)\big),\; m\big(r^2-\dot{x}^2+2\,x\,(\dot{x}-r)\big),$$

$$\tfrac{1}{3}\big(\dot{\alpha}^3+\dot{r}^3-\dot{\iota}^3-\dot{x}^3+3\,\underset{\cdot}{x}^2\,(\dot{\iota}+\dot{x}-\dot{\alpha}-\dot{r})\big),\; n\big(\dot{r}^2-\dot{x}^2+2\,\underset{\cdot}{x}\,(\dot{x}-\dot{r})\big);$$

gli apici sulle parentesi rettangole indicono le derivate delle quantità racchiuse fra le medesime parentesi; e le (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), (11) delle indeterminate da eliminarsi.

Sostituendo in queste equazioni in luogo delle quantità $\beta'(\alpha)-a$, $\dot{\beta}'(\dot{\alpha})-c$, $u'(\iota)-a$, $\dot{u}'(\dot{\iota})-c$, $z'(r)-a$, $z'(\dot{r})-c$, i loro valori $\frac{a'}{\alpha'}(\alpha-x)$, $\frac{c'}{\dot{\alpha}'}(\dot{\alpha}-\underset{\cdot}{x})$

$$\frac{a'}{\iota'}(\iota-x),\ \frac{c'}{\dot{\iota}'}(\dot{\iota}-\underset{\cdot}{x}),\ \frac{a'}{r'}(r-x),\ \frac{c'}{\dot{r}'}(\dot{r}-\underset{\cdot}{x})$$

cavati dalle derivate delle equazioni. che si sono moltiplicate sopra per (3), (7), (4), (8), (5), (9), ed osservando, che $\left[A\sqrt{1+a^2}+B\right]'$ $\left[\dot{A}\sqrt{1+c^2}-\dot{B}\right]'$ eguagliano rispettivamente

$$A'\sqrt{1+a^2}+A\frac{a\,a'}{\sqrt{(1+a^2)}}+B',\ \dot{A}'\sqrt{1+c^2}+\dot{A}\frac{c\,c'}{\sqrt{(1+c^2)}}-\dot{B}',$$

più posto θ' invece di $\frac{\theta'}{\underset{\cdot}{x}'}$, esse equazioni si riducono alle seguenti

$$(3)+(4)+(5)-(11)-(6)'=0,$$

$$(7)+(8)+(9)+(11)-(10)'=0,$$

$$(\mathrm{I})\ldots(x+t)\,a'\,s'+2\,(1)-(3)\frac{a'}{t'}=0,$$

$$(\mathrm{II})\ldots(\alpha+x)\,a'\,s'+2\,(1)+(4)\frac{a'}{\alpha'}=0,$$

$$(\mathrm{IV})\ldots(\underset{\cdot}{x}+t)\,c'\,\theta'-2\,(2)-(7)\frac{c'}{\dot{t}'}=0,$$

$$(\mathrm{V})\ldots(\dot{\alpha}+\underset{\cdot}{x})\,c'\,\theta'-2\,(2)+(8)\frac{c'}{\dot{\alpha}'}=0,$$

$$(\mathrm{III})\ldots(r+x)\,a'\,s'+m\,a'+2\,(1)+(5)\frac{a'}{r'}=0,$$

$$(\mathrm{VI})\ldots(\dot{r}+\underset{\cdot}{x})\,c'\,\theta'-n\,c'-2\,(2)+(9)\frac{c'}{\dot{r}'}=0,$$

$$(\mathrm{VII})\ldots(x-\dot{x})\Big(-(x+\dot{x})\,a'\,s'+m\,a'+2\,(1)\Big)$$

$$+(\underset{\cdot}{x}-\dot{x})\Big((\underset{\cdot}{x}+\dot{x})\,c'\,\theta'-n\,c'-2\,(2)\Big)+(11)\,(a-c)=0,$$

$$(\mathrm{VIII})\ldots2\,(\underset{\cdot}{t}+\dot{x}-\dot{\alpha}-\dot{r})\Big(\underset{\cdot}{x}\,c'\,\theta'-(2)\Big)-\Big(x\,(\dot{x}-\dot{r})+(10)\Big)\,c'=0,$$

$$(\mathrm{IX})\ldots-A'\,s'-B'+(3)\,(t-x)+(4)\,(\alpha-x)$$

$$+(5)\,(r-x)+(11)\,(x-\dot{x})-(6)=0,$$

$$(X) \ldots \dot{A}'\theta' - \dot{B}' + (7)(\dot{\iota} - \underset{\cdot}{x}) + (8)(\dot{\alpha} - \underset{\cdot}{x})$$

$$(9)(\dot{r} - \underset{\cdot}{x}) + (11)(\dot{x} - \underset{\cdot}{x}) - (10)\underset{\cdot}{x}' = 0.$$

Dalle equazioni (I), (II), (III), (IV), (V), (VI), (VIII) si cava

$$(3) = \frac{2\iota'}{a'}(1) - (x + \iota)\,\iota' s',\quad (4) = \frac{-2\alpha'}{a'}(1) + (\alpha + x)\,\alpha' s',$$

$$(5) = \frac{-2r'}{a'}(1) - m r' + (r + x)\,r' s',$$

$$(7) = -\frac{2\dot{\iota}'}{c'}(2) + (\underset{\cdot}{x} + \dot{\iota})\,\dot{\iota}'\theta',\quad (8) = \frac{2\dot{\alpha}'}{c'}(2) - (\dot{\alpha} + \underset{\cdot}{x})\,\dot{\alpha}'\theta',$$

$$(9) = \frac{2\dot{r}'}{c'}(2) + n\dot{r}' - (\dot{r} + \underset{\cdot}{x})\,\dot{r}'\theta',$$

$$(10) = n(\dot{r} - \dot{x}) + 2(\dot{\iota} + \dot{x} - \dot{\alpha} - \dot{r})\left(\underset{\cdot}{x}\theta' - \frac{1}{c'}(2)\right).$$

Così ponendo nelle due equazioni (IX), (X) in luogo delle (3), (4), (5), (7), (8), (9), (10), A', B', $\dot{A}'$, $\dot{B}'$, i loro valori, ed osservando, che le equazioni

$$\iota^2 + \dot{x}^2 - \alpha^2 - r^2 + 2x(r + \alpha - \dot{x} - \iota) = 0,$$

$$\dot{\iota}^2 + \dot{x}^2 - \dot{\alpha}^2 - \dot{r}^2 + 2\underset{\cdot}{x}(\dot{r} + \dot{\alpha} - \dot{x} - \dot{\iota}) = 0 \text{ danno}$$

$$(\iota - x)\,\iota' - (\alpha - x)\,\alpha' - (r - x)\,r' = \iota + \dot{x} - r - \alpha - (\dot{x} - x)\,\dot{x}',$$

$$(\dot{\alpha} - \underset{\cdot}{x})\,\dot{\alpha}' - (\dot{r} - \underset{\cdot}{x})\,\dot{r}' - (\dot{\iota} - \underset{\cdot}{x})\,\dot{\iota}' = (\dot{\alpha} + \dot{r} - \dot{\iota} - \dot{x})\,\underset{\cdot}{x}' + (\dot{x} - \underset{\cdot}{x})\,\dot{x}',$$

esse si riducono alle

$$-2(\iota + \dot{x} - r - \alpha)\left(x s' - \frac{(1)}{a'}\right)$$

$$-(\dot{x} - x)\left(m + \frac{(11)}{\dot{x}'} + 2\frac{(1)}{a'} - (\dot{x} + x)\,s'\right)\dot{x}' - (6) - m(r - \dot{x}) = 0,$$

$$(\underset{\cdot}{x}^2 - x^2)\,\theta'\dot{x}' - n(\underset{\cdot}{x} - \dot{x})\,\dot{x}' + 2(\dot{x} - \underset{\cdot}{x})\frac{\dot{x}'}{c'}(2) + (\dot{x} - \underset{\cdot}{x})(11) = 0.$$

Quest' ultima equazione trovata somministra

$$(11) = \left((\dot{x}+\underset{\cdot}{x})\,\theta' - n - \frac{2}{c'}\,(2) \right) \dot{x}'.$$

Similmente, sostituendo nella equazione (VII) il valore della indeterminata (11) qui esposta, ed osservando che le equazioni

$$c\underset{\cdot}{x}' - \underset{\cdot}{y}' = 0\,, \quad y - \underset{\cdot}{y} + c\underset{\cdot}{x} - a\,x + (a-c)\,\dot{x} = 0 \quad \text{danno}$$

$$x' - \dot{x} + \frac{a-c}{c'}\,\dot{x}' = \frac{a'}{c'}\,(x-\dot{x})\,, \quad \text{essa si riduce alla}$$

$$-\,(x-\dot{x})\left((x+\dot{x})\,a's' - m\,a' - 2\,(1) \right)$$

$$+\,a'\,(x-\dot{x})\left((\underset{\cdot}{x}+\dot{x})\,\theta' - n - \frac{2}{c'}\,(2) \right) = 0\,,$$

e però alla seguente

$$-\,(x+\dot{x})\,s' + m + \frac{2}{a'}\,(1) + (\underset{\cdot}{x}+\dot{x})\,\theta' - n - \frac{2}{c'}\,(2) = 0\,,$$

la quale dà

$$(x+\dot{x})\,s' - m - \frac{2}{a'}\,(1) = (\underset{\cdot}{x}+\dot{x})\,\theta' - \dot{n} - \frac{2}{c'}\,(2)\,;$$

e per tanto, la indeterminata (11) sarà anco eguale a $\dot{x}'\left((x+\dot{x})\,s' - m - \frac{2}{a'}\,(1) \right)$; e la equazione

$$(x-\dot{x})\,\dot{x}'\left(-\,(\dot{x}+x)\,s' + m + \frac{2}{a'}\,(1) + \frac{(11)}{\dot{x}'} \right)$$

$$-\left(2\,x\,s' - 2\,\frac{(1)}{a'} \right)(t+\dot{x}-r-\alpha) - m\,(r-\dot{x}) - (6) = 0$$

si ridurrà alla

$$2\left(x\,s' - \frac{(1)}{a'} \right)(t+\dot{x}-r-\alpha) + m\,(r-\dot{x}) + (6) = 0\,,$$

da cui si cava

$$(6) = -\,m\,(r-\dot{x}) - 2\,(t+\dot{x}-r-\alpha)\left(x\,s' - \frac{(1)}{a'} \right).$$

Finalmente, si pongano i valori trovati delle (3), (4), (5), (6), (7), (8), (9), (10), ed (11) nelle due equazioni

$$(3)+(4)+(5)-(11)-(6)'=0,$$

$$(7)+(8)+(9)+(11)-(10)'=0,$$

ed esse si ridurranno alle seguenti semplicissime

$$2\left[\frac{(1)}{a'}\right]'-2xs''-s'=0,\quad 2\left[\frac{(2)}{c'}\right]'-2\underset{\cdot}{x}\theta''-\underset{\cdot}{x}'\theta'=0,$$

le quali danno

$$2\left[\frac{(1)}{a'}\right]'-2\left[\frac{(2)}{c'}\right]'=2xs''+s'-2x\theta''-\underset{\cdot}{x}'\theta'.$$

Ma la derivata prima della

$$-(x+\dot{x})s'+(\underset{\cdot}{x}+\dot{x})\theta'+m-n+2\frac{(1)}{a'}-2\frac{(2)}{c'}=0$$

somministra

$$2\left[\frac{(1)}{a'}\right]'-2\left[\frac{(2)}{c'}\right]'=\left[(x+\dot{x})s'-(\underset{\cdot}{x}+\dot{x})\theta'\right]';$$

adunque sarà

$$2xs''-2\underset{\cdot}{x}\theta''+s'-\underset{\cdot}{x}'\theta'=[(x+\dot{x})s'-(\underset{\cdot}{x}+\dot{x})\theta']';$$

e conseguentemente

$$(x-\dot{x})s''-(\underset{\cdot}{x}-\dot{x})\theta''-\dot{x}'s'+\underset{\cdot}{x}'\theta'=0,$$

ovvero $[(x-\dot{x})s'-(\underset{\cdot}{x}-\dot{x})\theta']'-s'+\underset{\cdot}{x}'\theta'=0.$

Quest' ultima equazione integrata dà

$$(x-\dot{x})s'-(\underset{\cdot}{x}-\dot{x})\theta'-s+\theta=b:$$

b indica la costante portata dalla integrazione eseguita. Ora, eliminando le funzioni $t, \alpha, r, \dot{t}, \dot{\alpha}, \dot{r}, a, c$ dalle undici equazioni che rappresentano le relazioni che debbano aver luogo fra le undici quantità $x, \underset{\cdot}{x}, \alpha, r, t, \dot{\alpha}, \dot{r}, \dot{t}, \dot{x}, a, c$, si avranno tre equazioni fra le sole $x, y, \underset{\cdot}{y}, \dot{x}, x$ e le derivate di queste ultime, dalle quali eliminando $\dot{x}$, col mezzo di quella trovata qui sopra, cioè della

$$(x-\dot{x})s'+(\underset{\cdot}{x}-x)\theta'-s-\theta=b,$$

o della sua equivalente

$$(x-\dot{x})s''-\dot{x}'s'+(\underset{\cdot}{x}-\dot{x})\theta''-\dot{x}'\theta'=0$$

avransi tre equazioni, onde determinare le y, $\underset{\cdot}{y}$, ed $\underset{\cdot}{x}$ in funzione delle sola x, le quali faranno conoscere le curve a cui debbono essere tangenti le vie di trasporto.

In ultimo, ponendo i valori così determinati delle $\underset{\cdot}{x}$, $\underset{\cdot}{y}$, y nelle due equazioni

$$(x-\dot{x})s'+(\underset{\cdot}{x}-\dot{x})\theta'-s-\theta=b, \dot{y}-y=y'(\dot{x}-x)$$

ovvero nelle loro equivalenti

$$\dot{x}=(xs'+\underset{\cdot}{x}\theta'-s-\theta-b):(s'+\theta'),$$

$$\dot{y}=y+y'\Big((\underset{\cdot}{x}-x)\theta'-s-\theta\Big):(s'+\theta')$$

si otterranno i valori in x delle funzioni, $\dot{x}.\dot{y}$ coordinate della curva richiesta, e pertanto la curva stessa.

Corollario I. Essendo $(x-\dot{x})s'=Mm$, $(\underset{\cdot}{x}-\dot{x})\theta'=Mn$, l' equazione $(x-\dot{x})s'-(x-\dot{x})\theta'-s+\theta=b$, si ridurrà alla $Mm-Mn-s+\theta=b$, ossia

$$Mm+nD-Mn-Bm=b-CD+AB,$$

la quale insegna che l' eccesso della somma della tangente Mm coll' arce nD sulla somma della tangente Mn coll' arco Bm è costante: proprietà veramente singolare, e colla quale si potrebbe descrivere facilissimamente la linea cercata tMv, quando fossero descritte le CnD, BmA. Questa proprietà mi sembra la stessa di quella enunciata dal sig. Dupin officiale del genio marittimo di Francia in un rapporto di una sua Memoria, la quale fu sì ardentemente da me desiderata, ma invano; giacchè non ho mai avuto il bene neppur di vederla.

Corollario II. Se dalle equazioni

$$(x-\dot{x})s'-(x-\dot{x})\theta'-s+\theta=b,\ \dot{y}-y-y'(\dot{x}-x)=0,$$

dopo avervi posti i valori delle y, θ, ed s, si eliminerà la variabile x, si otterrà una equazione fra le sole coordinate $\dot{x}, \dot{y}$; cioè si avrà l'equazione fra le singole coordinate rettangole della curva richiesta nella proposta proposizione, vale a dire l'equazione della curva medesima.

Osservazione. Tutto ciò che si è fatto in queste ultime proposizioni nella ipotesi che la terra a trasportarsi si trovasse sparsa uniformemente su di una data superficie; e si dovesse trasportare e spandere similmente su altra equivalente superficie, si può fare con facilità anco pel caso che essa si trovi sparsa comunque e si debba trasportare su altra superficie ed ivi spargerla secondo qualunque altra legge.

Proposizione ventiquattresima. PROBLEMA.

Dato il profilo di un tronco d'argine ordinario e rettilineo, e la profondità del cavo dal quale si deve prendere la terra per costruirlo, non che le scarpe del cavo stesso; trovare la larghezza del cavo medesimo, supposta la sua lunghezza eguale a quella del tronco d'argine?

Il profilo del tronco d'argine dato sia il trapezio ordinario $EFGH$ (fig. 56), ed $ABCD$ sia quello del cavo: si cerca la DA larghezza superiore del cavo, supposto conosciuta la CM profondità e le pendenze coll'orizzonte delle CD, AB sue scarpe?

Si nominino le EH, FL, EL, cioè la base, l'altezza e la base di ogni scarpa dell'argine rispet-

tivamente B, A, ed mA; così si nomini y la MC profondità del cavo, ed ny la $AK = MD$ base o porzione orizzontale di ogni scarpa di esso; più x la AD l' arghezza cercata.

Evidentemente, le aree dei profili $EFGH$, $ABCD$ saranno $(B - mA)A$, $(x - ny)y$; e però siccome il cavo ed il tronco d' argine corrispondente hanno lunghezze eguali, così dovrà essere

$$\alpha(x - ny)y =) B - mA)A:$$

dove α indica il numero, per cui moltiplicando il volume della terra prima di smoverla, dà per prodotto il volume di essa trasportata in argine.

L' equazione qui trovata, somministra la larghezza cercata, cioè x, eguale ad

$$ny + \frac{B - mA}{y\alpha} A.$$

Corollario I. Se in vece di esse conosciuta la profondità del cavo, fosse data la AD sua larghezza superiore, e si cercasse la MC profondità; si avrebbe anch' essa mediante la medesima equazione superiormente trovata, la quale ordinata rispetto alla attuale incognita, cioè alla y, si riduce alla

$y^2 - \frac{x}{n} y = \frac{mA - B}{n\alpha} A$, che sciolta rispetto alla y stessa dà

$$y = \frac{x}{2n} \pm \sqrt{\frac{x^2}{4n^2} + \frac{mA - B}{n\alpha} A}.$$

Ma siccome $2ny$ dev' essere evidentemente minore di x, e però y minore di $\frac{x}{2n}$; così sarà propriamente $y = \frac{x}{2n} - \sqrt{\frac{x^2}{4n^2} + \frac{mA - B}{n} A}$.

Corollario II. Se poi non fosse data, nè la larghezza nè la profondità del cavo, infiniti sarebbero i cavi, che si potrebbero fare per costruire il tronco d' argine avente il profilo $EFGH$; e per tanto ammesso, che i profili dei cavi possibili dovessero tutti avere una scarpa nella stessa retta DC..., essi profili avrebbero i vertici degli angoli analoghi al B in uno stesso ramo... pBq ... di una iperbola equilatera conica, la quale avrebbe il centro in D, e per assintote la orizzontale Dt e la verticale Du; e per eqnazione, fra le coordinate $t = DK$, ed $u = KB$ verticale, la seguente

$$ut = \frac{B - mA}{\alpha} A.$$

Osservazione. Tutto ciò che si è detto rispetto alla larghezza e profondità del cavo, si estenderà, all'occorrenza anco alla base ed altezza dell' argine; anzi colla equazione $\alpha(x - ny)y = (B - mA)A$, si potrà determinare opportunamente una qualunque delle quantità α, x, y, B, n, m ed A, quando però saranno conosciute tutte le altre.

Proposizione venticinquesima. PROBLEMA.

Data la larghezza superiore del cavo, la base dell' argine, e le scarpe sì dell' uno che dell' altro; e supposto, che, i successivi cordoli inferiori dell' argine, siano formati coi successivi cordoli superiori del cavo; trovare l' altezza del cordolo del cavo corrispondente ad un dato cordolo dell' argine?

Ritenuta la figura usata nella precedente proposizione: la porzione d'argine $HEeh$ avente i lati EH, eh

orizzontali, siasi formata colla terra corrispondente alla porzione o cordolo del cavo avente per profilo il trapezio pure ordinario $ADda$; e si cerchi l'altezza, che debba avere il cordolo $abcd$ del cavo, essendosi con esso formato un dato cordolo $efgh$ dell' argine.

Per semplicità, si ritengano anco le denominazioni già usate nella proposizione antecedente; più si ponga

$$Mm=y',\ Mn=y'',\ Ls=A',\ Lr=A''.$$

L' equazione trovata nel corollario primo della proposizione qui citata, cioè

$$\alpha(x-ny)y=(B-mA)A$$

dà le due seguenti

$$y'^2-\frac{x}{n}y'=\frac{mA'-B}{\alpha n}A',$$

$$y''^2-\frac{x}{n}y''=\frac{mA''-B}{\alpha n}A'',$$

le quali somministrano

$$y'=\frac{x}{2n}-\sqrt{\frac{x^2}{4n^2}+\frac{mA'-B}{\alpha n}A'},$$

$$y''=\frac{x}{2n}-\sqrt{\frac{x^2}{4n^2}+\frac{mA''-B}{\alpha n}A''}:$$

si ommettono i segni positivi dei radicali, per la stessa ragione già esposta nel medesimo corollario anzi citato.

Questi valori di y', y'' trovati, danno evidentemente

$$y''-y'=\sqrt{\frac{x^2}{4n^2}+\frac{mA'-B}{\alpha n}A'}-\sqrt{\frac{x^2}{4n^2}+\frac{mA''-B}{\alpha n}A''},$$

cioè la retta mn, che è l' altezza cercata.

Osservazione I. Se l'argine sarà diviso in più cordoli orizzontali, colla formula qui esposta pel valore di $y''-y'$, si potranno trovare le altezze dei successivi cordoli corrispondenti del cavo; giacchè facendo in essa formula $A'=o$, ed A'' eguale all'altezza del primo cordolo dell'argine, si avrà l'altezza del primo cordolo del cavo: facendo A' eguale a questa medesima altezza del primo cordolo dell'argine, ed A'' a quella dei due primi insieme, si otterrà l'altezza del secondo cordolo del cavo; e così degli altri ecc.

Osservazione II. Quando le scarpe dell'argine, e del cavo non faranno coll'orizzonte angoli molto piccioli, per gli usi comuni, si potrà ammettere costantemente l'altezza di un cordolo del cavo all'altezza del corrispondente cordolo dell'argine, come la base inferiore di quest'ultimo cordolo alla base superiore di quella del cavo; e con ciò si avrà con semplicità ed anco con sufficiente approssimazione l'altezza del cordolo del cavo, corrispondente ad un dato cordolo dell'argine. Per esempio, si potrà ritenere la proporzione geometrica

$$mn : rs = eh : ad,$$

la quale somministra $mn = \frac{rs \cdot eh}{ad}$.

Osservazione III. Nelle due ultime proposizioni ho supposto tanto le due scarpe del cavo quanto le due dell'argine egualmente inclinate all'orizzonte; è però facile l'estendere le cose esposte anco al caso, che siano differentemente inclinate coll'orizzonte sì le une che le altre. Così, se le lunghezze del cavo e del tronco d'argine corrispondente non fossero

eguali, per esempio, fosse L quella del tronco d'argine ed l quella del cavo, le cose per questi tronchi analoghe alle esposte, si dovrebbero appoggiare alla equazione

$$\alpha l(x-ny)y=L(B-mA)A,$$

precisamente come le esposte si sono appoggiate alle $\alpha(x-ny)y=(B-mA)A$; anzi il giovine bene istruito, concepirà benissimo con quanta facilità si potranno stabilire delle cose analoghe alle medesime esposte sopra, qualunque siano per essere e le figure e le pendenze delle scarpe sì del cavo che del tronco d' argine corrispondente.

Osservazione IV. Le due ultime proposizioni qui esposte non sono affatto relative al trasporto delle terre, ma esse sono assolutamente necessarie per le seguenti: questo è il vero motivo per cui si sono messe in questo luogo anzichè altrove.

Proposizione ventiseiesima. Problema.

Date le dimensioni di un argine e quelle del cavo dal quale si deve prendere la terra per formarlo, ed anco la loro reciproca posizione; determinare quanto costerà il trasportamento della terra necessaria per la formazione di esso argine?

Egli è evidente, che la soluzione di questa proposizione si riduce a scoprire, quanto costerà il trasportamento di quella terra necessaria per formare un tronco d'argine di una data lunghezza, per esempio di quindici o venti metri; giacchè l'argine a costruirsi si potrà supporre composto di due o più di siffatti tronchi, per cui la spesa richiesta consisterà nella somma delle spese necessarie per la for-

mazione dei medesimi. Esprima pertanto *EFGH* (fig. 57 Tav. VII.) il profilo ed *efgh* la base di un tronco d'argine; *ABCD* il profilo del cavo corrispondente, ed *abcd* la base superiore di esso cavo.

Incomincierò a supporre, come suole accadere comunemente, che le figure *abcd*, *efgh* siano rettangole ed abbiano i lati *bc*, *he* eguali e peralleli, e gli *ab*, *ef* per diritto, ed i profili siano trapezi ordinarj aventi i loro lati paralleli orizzontali; e poscia estenderò le regole agli altri casi.

Si divida *FL* altezza dell'argine nelle parti *Lh*, *hi*, ecc. ciascuna di circa quattro decimetri; e si tirino le orizzontali *klh*, *min*, ecc., e nei trapezi ordinarj *EHlk*, *klnm*, ecc. risultanti si avranno i profili dei successivi primo, secondo, ecc. cordoli componenti l'argine; indi si divida *ABCD* profilo del cavo in tanti trapezi *ADqp*, *pqsr*, ecc. pure ordinarj, quanti sono i cordoli anzidetti dell'argine; e in modo che i cordoli del cavo aventi per profili questi ultimi trapezi *ADqp*, *pqsr*, ecc. siano sufficienti per formare ordinatamente i cordoli successivi *EHlk*, *klnm*, ecc. dell'argine; e ciò mediante la proposizione precedente.

Fatto ciò, si stabilisca l'ordine da seguirsi nel trasportare la terra dal cavo in argine, e sia esso il seguente. Si debba trasportare la terra di quel cordolo del cavo, che corrisponde al trapezio *ADqp* a formare il cordolo dell'argine corrispondente al trapezio *EHlk*; quella che corrisponde al trapezio *pqsr* a formare il cordolo, che corrisponde al secondo trapezio *lkmn*, ecc. Quest' ordine o sistema di trasporto vien seguito molte volte dagli stessi

operaj, e riunisce in sè l' economia ed anco la comodità per chi deve accomodare e pestare la terra, ed è conforme al desiderio di tutti coloro, che desiderano le opere bene eseguite.

Ammesso questo sistema nel trasportamento della terra in argine, la spesa totale richiesta, sarà la somma delle spese necessarie per trasportare rispettivamente le terre dei successivi cordoli $ADqp$, $qprs$, ecc. del cavo nei cordoli corrispondenti $EHlk$, $lkmn$, ecc. dell' argine.

Per calcolare quanto costerà il trasporto della terra $ApqD$ in $EHlk$, bisogna stabilire primieramente anco il particolare sistema delle operazioni a praticarsi dall' operajo per questo medesimo parziale trasporto. Comunemente l' operajo incomincia a trasportare la terra vicina alla retta ad lungo la fg, quella che viene appresso al fossetto così fatto l' appoggia all' arginello già formato, e così continuando, finalmente trasporta la porzione di terra vicina alla bc al lungo e contigua alla he; più egli eseguisce ciascuno di questi particolari trasporti camminando in linea retta parallelamente alla XY, che sega pel mezzo i lati bc, eh: questo particolare sistema di trasporto è fovorevole all' operajo ed anco a chi deve valutare la spesa, giacchè l' operajo trasportatore, così facendo, cammina su terra pressochè stabile, e percorre il minimo fra i viaggi possibili.

Ammesso il particolare sistema di trasporto qui descritto, sistema che io stesso vidi più volte a praticarsi naturalmente dagli stessi operaj, la spesa qui richiesta si avrà, come è facile a comprendersi, moltiplicando il peso della massa di terra trasportata

per la distanza fta i punti δ, Δ di mezzo delle rette *XT*, *Z Y*; giacchè questo prodotto risulta eguale alla somma di quei prodotti, che si hanno, moltiplicando ciascun peso parziale trasportato o carico per lo spazio percorso da esso nel trasportarlo.

Onde trovare quanto costerà il trasportamento della seconda porzione *prsq* in *klnm*, cioè quanto costerà il trasportamento della formazione del secondo cordolo dell' argine, il sistema delle operazioni, su cui si potrà appoggiare il calcolo della spesa è il seguente, il quale anch' esso praticasi comunemente dagli stessi operaj. La terra a trasportarsi che è sotto l' orizzontale *pq*, si deve trasportare sopra l' altra orizzontale *kl*; perciò l' operajo si praticherà una strada di salita; sia questa la più economica, cioè la *KN*, la cui inclinazione all' orizzonte dev' essere tale, secondo alcuni, che la base sia dupla della altezza, e la sua icnografía il rettangolo $\alpha\beta\theta\delta$ avente una larghezza di un metro circa: fatto ciò, per eseguire il presente trasportamento, ecco la serie delle particolari operazioni a praticarsi.

L' operajo si carica, dove è situata ciascuna massa parziale di terra, percorre la retta, che ha un termine in questo luogo e l' altro nel punto $k-\pi$, indi la salita *KN*, e poi quella retta che ha un termine nel punto *N* e l'altro dove deve trasportare la massa stessa; e pertanto, la spesa particolare qui richiesta, sarà eguale alla spesa necessaria per trasportare o raccogliere tutto il secondo cordolo del cavo nel punto $K-\pi$, più quella per trasportare l' equivalente massa fittizia da $K-\pi$ in $N-\nu$, più quella per diramare o spandere la stessa massa vera

o l'equivalente fittizia dal punto $N-\nu$ medesimo al luogo destinatole nel secondo cordolo dell'argine. Ora la prima di queste spese, cioè quella per raccogliere la terra sparsa sul rettangolo $pq-56$ nel punto $k-\pi$ si avrà colla proposizione sesta; quella pel trasporto a seconda della strada di salita da $k-\pi$ sino in $N-\nu$ moltiplicaudo la misura della retta KN per il peso fittizio da cui essa è percorsa, il quale sarà cinque quarti, o quattro terzi, od anco tre metà ed alcune volte sino il doppio del peso effettivo; in fine quella spesa per ispandere la terra, supposta già trasportata in $N-\nu$, ai rispettivi luoghi per formare effettivamente il secondo cordolo dell'argine, si avrà colla proposizione sesta medesima; giacchè, si debba essa massa spandere da $N-\nu$ ai rispettivi luoghi o raccogliere da questi nel punto $N-\nu$, la spesa di queste due operazioni sono eguali necessariamente, come si è già detto nella quinta osservazione della proposizione dodicesima. Qui però è bene avvertire, che sopra ad ogni unità superficiale quadrata della base 78, come anco della eg, non si spargerà generalmente una massa di terra eguale a quella, che trovasi sopra ogni pari unità superficiale delle $pq-56$, $AD-ac$ basi superiori dei due primi cordoli del cavo, ma bensì più o meno; giacchè le altezze hl, hi, ecc. per l'ordinario souo molto differenti dalle altezze dei cordoli corrispondenti del cavo.

Ciò che si è fatto pel calcolare la spesa del trasportamento della terra del secondo cordolo del cavo a formare il secondo cordolo dell'argine, si farà anco per determinare la spesa del trasportamento di un altro

cordolo qualunque del cavo al cordolo corrispondente dell' argine: fatta poscia la somma di tutte queste spese parziale necessarie per la formazione dei successivi cordoli del tronco d' argine considerato, si avrà la spesa richiesta per l' intera formazione di esso, e però all' occorrenza anco quella dimandata nella proposta proposizione.

Osservazione I. Qualunque siano le figure dei cavi, che si dovranno formare per costruire un argine, e dovunque essi siano situati rispetto all' argine stesso, combinando le cose dette qui sopra colle dichiarate nelle proposizioni prima, seconda, terza, quarta, quinta e sesta, si potrà sempre con facilità determinare quanto costerà la formazione di un tronco qualunque di un argine qualsivoglia.

Osservazione II. Alcune volte il numero dei cordoli dell' argine non converrà farlo eguale al numero dei cordoli del cavo; anco in questo caso si potrà sempre, mediante le cose suddette, determinare la spesa in quistione. In fine non voglio tralasciare di avvertire, che l' operajo nel trasportare il secondo, ed anco il terzo cordolo del cavo, quando questi abbiano una piccola altezza, in vece di una sola strada di salita, se ne pratica tre o più, per cui la sua fatica in realtà riesce minore di quella sopra contemplata; ma è altresì vero, che nella esecuzione del trasporto totale possono accadere altri accidenti sfavorevoli allo stesso operajo; e però considerando le cose in complesso, ovvero l' una per l'altra, come si è fatto, molto si approssima al vero ciò che abbiamo detto superiormente.

Osservazione III. Quando le circostanze non permetteranno di calcolare la spesa di cui si parla nell' ultima proposizione colle regole esposte nella sua soluzione, almeno si tenga questa spesa, e per tale si calcoli, eguale a ciò che costerebbe il trasporto di tutta la terra, se essa fosse nel centro di gravità del cavo, e si dovesse trasportare al luogo del centro di gravità del tronco d' argine corrispondente. Quando l' argine non sia molto tortuoso il risultamento che dà questa regola generalmente non si allontana molto da quello che si otterrebbe colle cose superiormente esposte.

In ultimo, quando si conoscerà la funzione $\varphi(\delta)$ di θ, della quale si è parlato nella proposizione quattordicesima, si potrà anco istituire la ricerca sullo stesso sistema di trasporto onde scoprire il più economico fra gli infiniti possibili, che si possono immaginare per costruire un tronco d'argine qualunque.

Osservazione prima.

Sebbene le sole cose, già dichiarate in questa parte, abbiano resa la medesima ormai troppo lunga rispetto alle altre parti del presente trattato, nulladimeno non posso ommettere di unirvi le seguenti, stante il bisogno che si può avere anco di esse in molte occasioni.

Proposizione ventisettesima. Teorema.

Le due quantità o masse di terra trasportate in tempi di diverse lunghezze a distanze disuguali, da

due differenti società di uomini egualmente abili al trasporto, qualora le altre circostanze dei trasporti siano fra loro eguali, sono in ragione composta della diretta dei rispettivi tempi e degli uomini trasportatori, e della inversa delle loro distanze.

Sebbene questa proposizione sarà per sè stessa evidente per la maggior parte de' lettori, nonostante io ne espongo la seguente dimostrazione.

Si chiami q la quantità di terra trasportata da una delle dette società o compagnie, d la distanza fra il luogo dove vi era la terra stessa a quello nel quale si è trasportata cioè la distanza del trasporto, ed u il numero degli uomini trasportatori, $e\,t$ il tempo impiegato. Così si nominino Q, D, U, e T le analoghe quantità per l' altra società. Evidentemente, si tratta di dimostrare, che sarà

$$Q:q=\frac{TU}{D}:\frac{tu}{d}.$$

Si denomini Q' la quantità di terra che U uomini trasporterebbero alla distanza D nel tempo t, e Q'' quella che trasporterebbero gli stessi U uomini alla distanza d nello stesso tempo t: e si suppongano questi uomini tutti egualmente abili al trasporto, come i suddetti.

Paragonando fra loro i differenti elementi dei quattro trasporti eseguiti dalle quattro società qui nominate, e per le quali sono

U, U, U, u gli uomini trasportatori;

D, D, d, d le distanze dei rispettivi trasporti;

T, t, t, t i tempi decorsi nell' eseguirli; e

Q, Q', Q'', q le rispettive quantità o masse di

terra trasportate, si avranno le tre proporzioni geometriche seguenti

$$Q : Q' = T : t, \; Q' : Q'' = \frac{1}{D} : \frac{1}{d}, \; Q'' : q = U : u,$$

le quali somministrano evidentemente la

$Q\,Q'\,Q'' : Q'\,Q''\,q = \frac{T\,U}{D} : \frac{t\,u}{d}$; e però quest'altra proporzione $Q : q = \frac{T\,U}{D} : \frac{t\,u}{d}$,

la quala esprime appunto ciò, che si doveva dimostrare.

Corollario I. La proporzione qui dimostrata dà l'equazione $Q\,D\,t\,u = q\,d\,T\,U$,
colla quala si potrà sempre determinare una delle otto quantità, che entrano in essa, mediante le altre sette delle medesime.

Corollario II. Se gli elementi t, d, q, ed u fossero rispettivamente le unità di misura delle analoghe T, D, Q, U, si avrebbe evidentemente

$$= \frac{T\,U}{D};$$

cioè la quantità di terra trasportata nel tempo T, alla distanza D, da U società di trasportatori ciascuna di u uomini, espressa dal quoto, che si avrebbe dividendo per la distanza del trasporto, il prodotto del numero delle società degli uomini trasportatori nel tempo impiegato nell'eseguire il trasporto. Così chiamando q la quantità di terra trasportata da un uomo in un giorno alla distanza di dieci metri sarà $Q = q \cdot \frac{T\,U}{D}$, esprimendo U il numero degli uomini, T il numero dei giorni, e D il numero dei decametri pel trasporto a cui si riferiscono le Q, T, U, D.

Corollario III. Se fosse $U = u$, o $T = t$, ovvero $D = d$, oppure $Q = q$ si avrebbe, correlativamente, nel primo caso $Q : q = \frac{T}{D} : \frac{t}{d}$; nel secondo $Q : q = \frac{U}{D} : \frac{u}{d}$; nel terzo $Q : q = UT : ut$; in ultimo $D : d = TU : tu$; proporzioni, le quali rappresentano altrettante proprietà relative a questi trasporti medesimi. Così se sarà $Q = q$, e $T = t$; ovvero $Q = q$, e $D = d$, ecc. si avranno altrettante proporzioni, ciascuna delle quali esprimerà una proprietà relativa al caso del trasporto a cui appartiene.

Osservazione seconda.

Allorchè si debbano eseguire grandi trasportamenti di terra, generalmente si distinguono gli operaj in tre differenti parziali società, incaricando l'una di esse di scavare e caricare la terra sugli strumenti, un'altra dell'effettivo trasporto, e la terza, se occore, di stritolare, spianare, e pestare la terra trasportata. In questi trasportamenti, perchè non accadano confusioni o nessuna delle tre società parziali sia più aggravata di lavoro delle altre due, è necessario, che i trasportatori non abbiano ad aspettare che si carichino gli strumenti, gli scavatori e caricatori non abbiano ad attendere l'arrivo degli strumenti vuoti a caricarsi, ecc; vale a dire, è d'uopo che la distribuzione di tutti gli uomini nelle tre suddette parziali società sia fatta in modo, che nessuna debba interrompere il lavoro affidato ad essa per difetto di operaj delle altre. Questa medesima

distribuzione è anco la più economica, giacchè con essa si eseguisce il trasportamento con un dato numero di uomini nel minimo tempo possibile.

Sebbene i direttori dei suddetti trasportamenti possono nell'atto pratico conseguire l'anzidetta distribuzione di operaj, col farne primieramente una affatto arbitraria, e poscia far passare nel corso del lavoro gli uomini dall'una all'altra delle tre società parziali fino a tanto che abbiano conseguito la richiesta; nulladimeno, siccome alcune volte occorre ai medesimi di conoscere quanti dovranno essere gli uomini a destinarsi per ciascuna di quelle parziali società, prima di incominciare o di dar mano al trasportamento effettivo, così credo bene di esporre la proposizione seguente colla quale, quando essi conosceranno la detta distribuzione per un dato trasportamento, con facilità potranno scoprirla per qualunque altro analogo, senza punto ricorrere al sopradetto sperimento.

Proposizione ventottesima. PROBLEMA.

Dato il numero degli uomini coi quali si debbe esseguire un trasportamento, si dimanda quanti dovranno essere i trasportatori, e gli scavatori caricatori stritolatori spianatori e pestatori insieme, perchè tutti gli operaj possono fare continuamente le loro incombenze, senza interruzione, essendo d'altronde noto quanti furono i trasportatori, e gli scavatori caricatori ecc. insieme, per un altro trasportamento analogo ed interamente conosciuto.

Si indichino colle d, t, a la distanza, il numero dei trasportatori, e quello degli scavatori caricatori ec. pel trasporto conosciuto. Così, si chiami D la distanza pel nuovo trasportamento, U il numero dato degli uomini coi quali si debbe questo eseguire, T il numero dei trasportatori, ed A quello, pure cercato, degli uomini che debbono eseguire le altre operazioni di questo trasportamento medesimo.

Essendo d la distanza, fra il luogo dove è situata la terra, e quello nel quale si deve trasportarla, pel dato della proposizione, i trasportatori debbono essere t; e però, se si volesse trasportare la stessa quantità o massa di terra alla distanza D, il numero dei trasportatori a ciò necessarj dovrebbe essere evidentemente $\frac{tD}{d}$, e quello degli altri operaj per compire questo trasportamento, cioè il numero degli scavatori caricatori, ecc. insieme, dovrebbe essere a, come pel medesimo trasportamento conosciuto.

Ma per due trasportamenti a distanze eguali, e fra loro analoghi, debbano essere i loro trasportatori proporzionali geometricamente ai rispettivi, scavatori caricatori ecc., per cui si ha la proporzione $\frac{tD}{d} : A = T : A$; ossia l' equazione $ADt = adT$; adunque, siccome per lo stesso dato della proposizione si ha anco $A + T = U$; così per la determinazione delle richieste quantità T, A si avranno le due equazioni seguenti

$$A + T = U, \quad ADt = adT,$$

le quali somministrano

$$T = \frac{tDU}{ad + tD}, \quad \text{ed } A = \frac{adU}{ad + tD}.$$

Vale a dire nel nuovo trasportamento in quistione a farsi alla distanza D con U uomini, si dovranno destinare $\frac{tDU}{ad+tD}$ per trasportatori, ed $\frac{adU}{ad+tD}$ per iscavatori caricatori ecc. insieme.

Corollario I. Si chiamino Q, q le quantità di terra trasportate in tempi eguali dagli uomini U, $a+t$ nei trasportamenti qui sopra considerati; cioè Q quella trasportata nel nuovo trasportamento, e q quella trasportata nel dato.

Siccome in due trasportamenti analoghi e ben regolati, come si suppongono i due contemplati superiormente, sono le quantità di terra trasportate geometricamente come gli uomini destinati a scavare, caricare ecc; così si avrà la proporzione $Q:q=A:a$; nella quale ponendo per A il suo valore anzi trovato, e riducendo la risultante proporzione, si ottiene facilmente $Q:q=dU:ad+tD$.

Se fosse $U=a+t$, cioè se le due società fossero composte di due numeri eguali di uomini si avrebbe, ponendo $a+t$ in luogo di U nell'ultima proporzione trovata, $Q:q=ad+dt:ad+Dt$;
proporzione la quale ci insegna, che le quantita di terra trasportate dagli stessi uomini, non sono a rigore reciprocamente proporzionali alle rispettive distanze dei due trasportamenti, come si suppone da alcuni pratici.

Osservazione I. Se sarà $d<D$, ossia $\frac{d}{D}<1$; si avrà $\frac{ad+dt}{ad+Dt}>\frac{d}{D}$; e perciò anco $\frac{Q}{q}>\frac{D}{d}$. All'opposto, se fosse $d>D$, si troverebbe, come è d'altronde naturale, $\frac{Q}{q}<\frac{d}{D}$: vale a dire le quantità

della terra trasportata variano meno rapidamente che la ragione reciproca delle distanze. Concludasi pertanto, che il valore vero di Q sarà maggiore o minore di quello, che si ammette dagli anzidetti pratici, secondo che sarà d minore ovvero maggiore della D: appunto come si riscontra nei risultamenti delle reiterate sperienze fatte dal benemerito Ingegnere in capo sig. Lodovico Bolognini.

Osservazione II. Ora che si conosce A numero degli scavatori-caricatori-stritolatori-spianatori e pestatori insieme, facilmente si può trovare il numero dei singoli scavatori e caricatori; e quello degli stritolatori-spianatori-e pestatori insieme. Di fatto, si nomini c il numero degli scavatori-caricatori, e p quello dei stritolatori-spianatori-pestatori pel trasportamento dato; e C, P gli analoghi numeri per l'altro trasportamento.

Essendo evidentemente $c : C = p : P$, si avrà

$$c + p : C + P = c : C = p : P;$$

ossia $\quad a : A = c : C$, ed $a : A = p : P$.

Quindi sarà $C = \frac{cA}{a} = \frac{c\,d\,U}{a\,d + t\,D}$, e $P = \frac{pA}{a} = \frac{p\,d\,u}{ad + tD}$; vale a dire degli uomini U, coi quali si deve fare il trasportamento in quistione, se ne dovranno destinare $\frac{c\,d\,U}{a\,d + t\,D}$ per iscavatori-caricatori, e $\frac{p\,d\,U}{ad + tD}$ per istritolatori-spianatori-pestatori, come $\frac{t\,D\,U}{ad + tD}$ per veri trasportatori: sempre che questi numeri risultino interi; altrimenti si vegga ciò, che si dice pel caso che siano frazionari nella proposizione che segue.

Osservazione III. Se la mercede giornaliera di uno scavatore - caricatore, sarà eguale a quella di un trasportatore, e di uno stritolatore-spianatore-pestatore, evidentemente le tre spese per iscavare e caricare, per trasportare, e stritolare, spianare e pestare saranno direttamente proporzionali ai numeri degli uomini impiegati in queste tre differenti società; e però starà la spesa per gli scavatori - caricatori, a quella dei trasportatori, a quella degli stritolatori - spianatori - pestatori come i numeri

$$\frac{c\,d\,U}{a\,d+t\,D},\ \frac{t\,D\,U}{a\,d+t\,D},\ \frac{p\,d\,U}{a\,d+t\,D};$$

cioè come $cd : tD : pd$. E pertanto conoscendosi le spese fatte in un trasportamento di terra per ciascuna di queste tre operazioni, si potranno conoscere facilmente i numeri degli operaj ad impiegarsi in un altro consimile trasportamento, qualora sia data la distanza ed il numero totale degli uomini da impiegarsi in esso. Quindi, siccome una serie di esperienze ha somministrato, supposta la mercede giornaliera di ogni operajo di una lira e mezza italiana, la spesa per iscavare e caricare un metro cubo di terra ordinaria di centesimi quattordici, per trasportarlo alla distanza di trenta metri la spesa di dodici centesimi, e per accomodarla di sei; così si potrà porre $c=14$, $t=12$, $p=6$, $d=30$, ed $a=20$; e però per un altro consimile trasportamento dovrà stare il numero degli scavatori - caricatori, a quello dei trasportatori, a quello degli stritolatori - spianatori - pestatori, rispettivamente come $420 : 12D : 180$, ossia come $35 : D : 15$. Dimodochè date le D, U con facilità si potranno determinare C, T, P.

Osservazione IV. Con altri dati, e propriamente con quelli espressi nella seguente proposizione, si può arrivare altrimenti a fare ciò di cui si è parlato qui sopra.

Proposizione ventinovesima. Problema.

Dato il numero degli uomini coi quali si debbe eseguire un trasportamento, e la distanza di esso, ed anco il tempo che un solo operajo impiega a preparare caricato un solo strumento, cioè a scavare e caricare su di esso la terra, e con esso la velocità media comune ad ogni operajo vero trasportatore, non che il tempo che un operajo impiega a stritolare, spianare e pestare la terra trasportata in una volta con un solo strumento; trovare quanti debbono essere gli scavatori-caricatori, i trasportatori, e gli stritolatori-spianatori-pestatori, perchè questi operaj differentemente occupati non abbiano ad interrompere i rispettivi lavori per una difettosa o malintesa loro distribuzione?

Si indichi con T il numero dei trasportatori, con C quello degli scavatori-caricatori, e con P quello degli stritolatori-spianatori-pestatori, numeri tutti e tre richiesti; e con θ il tempo che fa d' uopo ad ogni operajo per preparare caricato uno strumento, con λ quello che fa d' uopo ad esso per stritolare, spianare, e pestare la terra stessa di un sol carico; con v la velocità media di ogni operajo trasportatore; più, indichisi con ω un tempo finito qualunque, per esempio, di uno o di due od anco di più giorni di lavoro, con D la distanza del trasporto ossia il

viaggio fatto in ciascuna volta da uno strumento; e con U finalmente, si intenda il numero totale degli uomini, che si vogliono impiegare in questo lavoro.

Evidentemente sarà $\frac{D}{v}$ il tempo, che trascorrerà dall' istante che ogni strumento s' incamminerà al trasporto, al momento che lo stesso sarà ricondotto al luogo dov' era; e però $\omega : \frac{D}{v}$ ossia $\frac{\omega v}{D}$ indicherà il numero dei viaggi o d' andirivieni fatti con ciascun strumento nel tempo ω; ed $\frac{\omega v}{D} T$ sarà il numero totale dei carichi trasportati nello stesso intervallo di tempo ω. Così $\frac{\omega}{\theta}$, indicherà quanti strumenti avrà caricato ciascun operajo nella stessa duratura ω; e però $\frac{\omega C}{\theta}$ esprimerà il numero totale degli strumenti caricati nello stesso intervallo di tempo ω da tutti gli operaj scavatori-caricatori. Similmente $\frac{\omega}{\lambda}$ esprimerà il numero dei carichi di terra, che si saranno stritolati spianati e pestati nel tempo ω da ciascuno operajo destinato appositamente a questo speciale lavoro; e conseguentemente $\frac{\omega P}{\lambda}$ rappresenterà il totale numero dei carichi di terra, che si saranno stritolati spianati e pestati dai medesimi anzidetti operaj nello stesso tempo ω.

Quindi, per la condizione voluta dalla proposta proposizione, dovrà essere $\frac{\omega v}{D} T = \frac{\omega C}{\theta}$, $\frac{\omega}{\theta} C = \frac{\omega}{\lambda} P$,

ossia $v\theta T = DC$, $\lambda C = \theta P$. Ma siccome dev' essere anco $C + T + P = U$; così fra le tre incognite C, T e P si avranno le tre equazioni

$$v\theta T = DC, \quad \lambda C = \theta P, \quad C + T + P = U,$$

le quali sciolte danno

$$C = \frac{v\theta U}{D + v\theta + v\lambda}, \quad T = \frac{DU}{D + v\theta + v\lambda}, \text{ e } P = \frac{v\lambda U}{D + v\theta + v\lambda}.$$

Ora, se i numeri espressi da queste tre espressioni risulteranno tutti è tre interi, pel che basterà che siano interi due di essi, i medesimi saranno esattamente i tre numeri richiesti; cioè il numero degli scavatori - caricatori dovrà essere eguale a $\frac{v\theta U}{D + v\theta + v\lambda}$, quello dei trasportatori a $\frac{DU}{D + v\theta + v\lambda}$, e quello degli stritolatori - spianatori - pestatori a $\frac{v\lambda U}{D + v\theta + v\lambda}$.

Qualora poi queste tre espressioni od almeno due di esse non saranno intere, dimodochè siano esse eguali rispettivamente ad $I + \frac{m}{n}$, $I' + \frac{m'}{n'}$, $I'' + \frac{m''}{n'}$, dove I, I', I'' indicono dei numeri interi, ed $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$ delle frazioni; se ciascuna di queste frazioni sarà maggiore di un mezzo, converrà fare $C = U - I' - I'' - 2$, $T = I' + 1$, e $P = I'' + 1$; se le stesse frazioni saranno invece minore tutte e tre di un mezzo, si farà $C = U - I' - I'' - 1$, $T = I' + 1$, e $P = I''$; giacchè sarà sempre meglio, che abbondino i trasportatori e gli stritolatori-spianatori-pestatori, anzichè gli scavatori-caricatori.

Se poi una o due delle anzidette frazioni fossero minori e l'altre o l'altra fosse maggiore di una metà, per formare i valori delle C, T, P converebbe aumentare di un unità quello o quelli fra gli interi I, I', I'' al quale fossevi unita una frazione maggiore di una metà ed ommettere agli altri od all'altro la frazione che si deve unire ai medesimi per eguagliare le suddette espressioni frazionarie.

Osservazione I. Colle semplicissime equazioni $\frac{T}{C}=\frac{D}{v\theta}$, $\frac{P}{C}=\frac{\lambda}{\theta}$, desunte dalle sopra esposte, si può scoprire anco, qual è il minimo numero di operaj, che faccia d' uopo per un trasportamento, di cui siano date le quantità v, θ, λ, D; affinchè i trasportatori non abbiano a fermarsi ad aspettare il carico, gli scavatori-caricatori interrompere il loro lavoro per aspettare, che arrivino gli srrumenti vuoti a caricarsi, ed un simile difetto accada agli stritolatori-spianatori-pestatori.

Si trovino perciò le frazioni, che sono rispettivamente eguali alle $\frac{D}{v\theta}$, $\frac{\lambda}{\theta}$, ed hanno i termini più piccoli ed i denominatori eguali fra loro; e queste siano espresse dalle $\frac{T'}{C'}$, $\frac{P'}{C'}$; e si avrà $\frac{T}{C}=\frac{T'}{C'}$, e $\frac{P}{C}=\frac{P'}{C'}$; ed il minimo numero totale d'operaj, che si potrà impiegare nel trasportamento di cui si parla, verrà espresso da $C'+T'+P'$; di cui C' indicherà il numero degli scavatori-caricatori, T' dei trasportatori, e P' degli altri.

Se i due numeri $D, \nu\theta$ fossero fra loro primi, si avrebbe $C' = \nu\theta$, $T' = D$, e $P' = \lambda\nu$; e però anco $C = \nu\theta$, $T = D$, e $P = \lambda\nu$; ed il numero minimo totale di operaj eguaglierebbe in questo caso il numero $\nu\theta + D + \nu\lambda$, immediatamente conosciuto pel dato della proposizione medesima.

Esempio. Se fosse $\nu = 2$ metri, $\theta = 30''$, $\lambda = 24''$, $D = 45$ metri; e però $\frac{D}{\nu\theta} = \frac{45}{60}$; e $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{24}{30}$, si troverebbe $\frac{T'}{C'} = \frac{15}{20}$, e $\frac{P}{C} = \frac{16}{20}$; e per conseguenza $C' = 20$, $T' = 15$, e $P' = 16$. Quindi il minimo numero totale di operaj abbisognevoli in questo esempio sarebbe cinquantuno, dei quali venti sarebbero scavatori-caricatori, quindici trasportatori e sedici sarebbero gli stritolatori-spianatori-pestatori insieme.

Osservazione. Affinchè si possa soddisfare esattamente la proposizione proposta, il numero U totale degli operaj, dovrà rendere intere due delle tre espressioni, che rappresentano i valori delle quantità C, T, P, per esempio le due $\frac{U\nu\theta}{D+\nu\theta+\nu\lambda}$, $\frac{DU}{D+\nu\theta+\nu\lambda}$; ciò che avrà luogo tutte le volte, che U sarà un multiplo di $C'+T'+P'$; e per gli altri casi, ossia per altri valori di U, la proposizione stessa non si potrà soddisfare, che per approssimazione, nel modo, che si è detto sopra; cioè col prendere $C = I$, ovvero eguale ad $I + 1$, ecc. ecc.

Osservazione III. Colle tre equazioni $\nu\theta T = CD$, $\lambda C = \theta P$, $C + T + P = U$ si potranno determinare tre qualsivogliono delle otto quantità $\nu, \theta, \lambda, D, U, C, T, P$, che entrano in esse, quando si conosce-

ranno le altre cinque, semprechè in ciascuna delle tre equazioni vi sia almeno una delle tre incognite.

Così, se fossero, date v, θ, λ, D, e non si potesse disporre neppure del minimo numero U d' operaj necessario, perchè non soppravanzino ritagli di tempo d' ozio a nessuna delle tre parziali società destinate ai tre differenti lavori, potrebbe importare di conoscere quei minimi valori delle U, C, T, P corrispondenti ai dati delle D, v, θ, λ, per modo, che i ritagli dei detti tempi, che avanzassero ad una od anco a due delle suddette società parziali, per difetto inevitabile, fossero anch' essi minimi; questi valori si potranno conseguire col metodo seguente.

Egli è evidente, che il minimo discapito di tempo avrà luogo, quando sia minima tanto la differenza fra le espressioni $\frac{\omega}{\theta}C$, $\frac{\omega v}{D}T$, quanto quella fra le $\frac{\omega}{\lambda}P$, $\frac{\omega v}{D}T$, ossia quando le quantità

$$\frac{\omega}{\theta}C-\frac{\omega v}{D}T=\frac{\omega\lambda}{\theta D\lambda}(DC-v\theta T)$$

$$\frac{\omega}{\lambda}P-\frac{\omega v}{D}T=\frac{\omega\theta}{\theta D\lambda}(DP-v\lambda T)$$

abbiano la minima differenza dallo zero; e però la quistione si ridurrà a determinare i valori corrispondenti delle C, T, P, i quali sostituiti nelle due espressioni

$$DC-v\theta T\,,\quad DP-v\lambda T$$

diano risultamenti prossimi allo zero più di quelli, che si avrebbero, ponendo in esse espressioni in luogo delle stesse C, T, P altri loro valori più piccioli.

Per questo, si porranno nelle due espressioni

$$DC-\nu\theta T,\ DP-\nu\lambda T$$

successivamente i numeri 1, 2, 3, 4, ecc. in luogo della T, e si otterranno le

$$DC-\nu\theta,\ DC-2\nu\theta,\ D\nu\theta C-3,\ DC-4\nu\theta, \text{ ec.}$$
$$DP-\nu\lambda,\ DP-2\nu\lambda,\ DP-3\upsilon\lambda,\ DP-4\nu\lambda, \text{ ec.}$$

e si troveranno i minimi valori delle C, P, che renderanno questi binomj più prossimi allo zero; e quelli fra questi valori delle C, P, che daranno, per esempio, pei binomj $DC-3\nu\theta$, $DP-3\nu\lambda$ i valori più prossimi allo zero, rappresenteranno gli scavatori-caricatori, e stritolatori-spianatori-pestatori corrispondenti a tre trasportatori; e la somma dei detti minimi valori dalle C, P unita al corrispondente della T, darà il minimo valore della U.

Osservazione IV. Se nella proposta proposizione invece di essere conosciuta la velocità ν, fosse conosciuto il tempo che ogni strumeto impiegherà per ogni andiriviene, si troverebbero con quest'altro dato dei risultamenti, che si avranno immediatamente, ponendo nei sopra trovati in luogo di ν l'espressione $\frac{D}{\pi}$, ove con π si intende il tempo stesso, qui per ipotesi conosciuto.

Così, se in un trasportamento non vi dovranno essere gli stritolatori-spianatori-pestatori, per trovare i trasportatori e gli scavatori-caricatori, basterà ritenere nelle formole esposte sopra, la U eguale alla sola somma di questi, che esse somministreranno immediatamente i valori delle C, T anco per questo caso.

Similmente, se nel trasportamento si dovranno usare anco delle bestie, come si fa spesse volte mediante le Barozze, i Caretti, ecc., volendo fare la distribuzione degli uomini nelle tre parziali società di cui si parla, cioè in iscavatori-caricatori, in trasportatori o conduttori delle Carette o Barozze, ed in stritolatori-spianatori-pestatori, converrà valutare il carico di ogni Caretta o Barozza circa il quadruplo di quello di una Carriuola. Questi mezzi di trasporto però, rarissime volte si usano, quando la distanza fra il luogo dove vi è la terra, e quello nel quale si debbe essa trasportare sia minore di cinquanta metri.

Osservazione V. Quando il trasporto delle terre si faccia con Carri o con Barche, gli nomini che eseguiscono l'intero trasportamento si dividono alcune volte in quattro società parziali, cioè in iscavatori-caricatori, trasportatori, scaricatori, e stritolatori-spianatori-pestatori: anco per questi trasportamenti colle cose snperiormente esposte si possono trovare gli operaj da impiegarsi parzialmente in ciascuna delle distinte quattro società, semprechè si conosca per gli scaricatori ciò che si è supposto conosciuto sopra per le altre tre società parziali.

Osservazione VI. Qui sopra si è supposto tacitamente che agli operaj non mancassero gli strumenti necessarj pel trasportamento; accade spesse volte però, che per diffetto d' istrumenti essi non si dividono neppure nelle tre parziali società di cui si è parlato superiormente; per cui, affinchè il giovine sia di tutto prevenuto, dirò come in questi casi bisognerà regolare le divisioni degli operaj che debbono eseguire un trasportamento.

Nella costruzione di un argine è necessario che vi sia la società degli stritolatori-spianatori-pestatori, e che il loro interesse sia affatto indipendente da quello degli altri operaj impiegati nella costruzione, e ciò per quello che si dirà a suo tempo.

Se il trasporto si dovrà eseguire con ragge o ruzze sarà bene che vi siano gli operaj scavatori che rendano soffice la terra a trasportarsi, il che potranno fare anco con aratri, ed a parte vi siano i caricatori-trasportatori-scaricatori, se si farà con carri, sarà bene che vi siano gli scavatori-caricatori, i quali siano ajutati nel caricare dai trasportatori, ed i trasportatori, indi gli scaricatori i quali siano ajutati dai medesimi trasportatori: anzi in generale i trasportatori potranno fare essi soli l'ufficio di scaricatori, giacchè in tanto si riposeranno le bestie.

Se si useranno Carriuole, Barelle, Barocci, o Carretti sarà bene che vi siano gli scavatori-caricatori, coadjuvati nel caricare dai trasportatori, indi i trasportatori-scaricatori, oltre la società che sempre vi dovrà essere degli stritolatori-spianatori-pestatori. In somma, se per qualche circostanza inevitabile nel corso di un trasportamento dovranno rimanere interpolatamente in ozj non necessarj alcuni agenti, e si potranno far succedere ad alcuni di essi piuttosto che ad altri, bisognerà combinare gli agenti medesimi in maniera, avendo riguardo al valore delle loro giornate ed alle durate degli ozj, che accadrebbero concedendoli ad alcuni anzichè ad altri, bisognerà dico combinare gli agenti medesimi in modo, che la somma dei valori dei tempi consumati in questi ozj riesca la più picciola compatibilmente colle dette circostanze.

Proposizione ventinovesima.

Supposto che un trasporto sia eseguibile con istromenti a ciascun dei quali si possa attaccare un cavallo, ovvero due o più, si dimanda quanti converrà attaccarne, perchè la spesa per il carico trasporto e scarico insieme riesca la minima, essendo dato il numero dei caricatori, quella porzione di una giornata di lavoro che è necessaria ad un' operajo per caricare un metro cubo di terra, il volume della terra trasportabile da un cavallo, la porzione della detta giornata impiegata da uno strumento sia carico o vuoto a percorrere un metro di viaggio, l' analogo tempo per iscaricare ogni strumento, non che la distanza del trasporto, ed i rispettivi prezzi delle giornate di un caricatore, di un cavallo e di un carrettiere?

Si esprima colla x il numero richiesto, cioè il numero di quei cavalli che si dovranno attaccare a ciascuno strumento perchè la spesa del trasportamento riesca la minima: colla a il numero dei caricatori, e così ordinatamente colle b, c, d, e, D, f, g, ed h si esprimano tutte le altre quantità conosciute, che seguono nel dato esposto della proposizione.

Evidentemente sarà cx il volume della terra costituente il carico di ogni strumento, $\frac{cx}{a}$ la porzione di esso caricata da ciascuno operajo caricatore, e però, siccome un metro si caricarebbe da un uomo nel tempo b, così ogni strumento si caricherà nel tempo $\frac{bcx}{a}$, supposto sempre che l' unità di tempo sia

la durata della giornata di lavoro. Quindi il tempo impiegato da ogni strumento in un' andiriviene o viaggio sarà eguale a

$$\frac{a}{bcx} + 2dD + e;$$

ed il numero dei viaggi in una unità di tempo ossia in una giornata di lavoro risulterà

$$1 : \left(\frac{bcx}{a} + 2dD + e\right), \text{ ossia } \frac{a}{bcx + 2adD + ae};$$

e conseguentemente il volume della terra trasportata in ogni giornata, essendo eguale evidentemente al prodotto delle tre quantità

$$\frac{a}{bcx + 2adD + ae}, \quad cx, \quad \frac{a}{bcx},$$

verrà espresso dalla

$$\frac{a^2}{b(bcx + 2adD + ae)}.$$

Similmente per essere af la spesa giornaliera per tutti i caricatori, $xg \cdot \frac{a}{bcx} = \frac{ag}{bc}$ quella pei cavalli di tiro, ed $h \cdot \frac{a}{bcx} = \frac{ah}{bcx}$ quella dei carettieri, sarà

$$af + \frac{ag}{bc} + \frac{ah}{bcx} = \frac{a}{bc}\left(bcf + g + \frac{h}{x}\right)$$

la spesa giornaliera totale pel trasportamento di

$$\frac{a^2}{b(bcx + 2adD + ae)}$$

metri cubi di terra; e per tanto il trasportamento di un solo metro di terra costerà

$$\frac{a}{bc}\left(bcf + g + \frac{h}{x}\right) : \frac{a^2}{b(bcx + 2adD + ae)},$$

ossia $\frac{a}{c}\left(bcf + g + \frac{h}{x}\right)(bcx + 2adD + ae)$;

ovvero $$ab h\left(A+\frac{1}{x}\right)(B+x),$$

posto $\frac{bcf+g}{h}=A$, ed $\frac{a}{bc}(2dD+e)=B$.

Ora il valore d' x richiesto oltre essere intero, dovrà avere la proprietà di rendere la quantità

$abh\left(A+\frac{1}{x}\right)(B+x)$ minore di ciascuna delle due

$$abh\left(A+\frac{1}{x+1}\right)(B+x+1),\ abh\left(A+\frac{1}{x-1}\right)(B+x-1),$$

ossia di soddisfare entrambe le relazioni seguenti

$$\left(A+\frac{1}{x+1}\right)\left(B+x+1\right)>\left(A+\frac{1}{x}\right)\left(B+x\right),$$

$$\left(A+\frac{1}{x-1}\right)\left(B+x-1\right)>\left(A+\frac{1}{x}\right)\left(B+x\right),$$

o le loro equivalenti

$$\frac{B}{x+1}+A>\frac{B}{x},\ \frac{B}{x-1}-A>\frac{B}{x};$$

la prima delle quali somministra

$$x>-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+\frac{B}{A}\right)},$$

e la seconda $x<\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+\frac{B}{A}\right)}$.

Quindi il numero dei cavalli da attaccarsi a ciascuno strumento perchè la spesa del trasportamento riesca la minima, in generale, sarà l' intero compreso fra i due numeri qui trovati

$$-\tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+\frac{B}{A}\right)},\ \tfrac{1}{2}+\sqrt{\left(\tfrac{1}{4}+\frac{B}{A}\right)}$$

cioè fra

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bc(bcf+g)+4ah(2dD+e)}{bc(bcf+g)}\right)}$$

ed $$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{bc(bcf+g)+4ah(2dD+e)}{bc(bcf+g}\right)}$$

Osservazione I. Essendo la differenza di questi ultimi due numeri eguale all' unità, se uno di essi sarà frazionario tale sarà anco l' altro, e tra essi vi sarà sempre un solo numero intero; se poi uno di questi numeri risulterà intero, intero sarà anco l' altro: in quest'ultimo caso, che sarà rarissimo, il numero richiesto potrà essere indifferentemente sì l' uno che l' altro dei medesimi due numeri.

Osservazione II. Vi sarebbero altre riflessioni a farsi alla proposizione qui trattata, ma come già ho detto non è mia intenzione di esporre un trattato completo sul trasportamento delle terre, e d' altronde le cose generali esposte sono sufficienti per lo scopo attuale, così io le ommetto e con esse anco altre curiosissime quistioni, e pongo fine alla parte presente.

PARTE QUARTA.

Della traccia di un argine, e dei luoghi dove conviene prendere la terra per formarlo.

Della traccia.

Nella determinazione della traccia di un argine si debbano aver di mira particolarmente, la bontà

ossia la durata e stabilità che si possono procacciare all' argine stesso mediante una scelta opportuna della traccia medesima; gli ostacoli insuperabili; e la solita economia: parleremo di queste tre cose separatamente. Prima però di parlare di queste cose, non voglio tralasciare di avvertire, che, sebbene l' ingegnere incaricato di stabilire la traccia di un nuovo argine debba portarsi sul luogo dove si deve erigere l' argine medesimo, nulladimeno, è sempre utile ed alcune volte anco necessario, che egli si procuri del luogo stesso una mappa analoga a quella di cui si è parlato alla fine della prima parte; vale a dire, una carta nella quale siano segnati particolarmente gli accidenti del luogo medesimo, che sono relativi al così detto *tipo di planimetria*, ed ai profili del terreno determinati con apposite livellazioni.

Delle qualità della traccia necessarie per la bontà dell' argine.

Se le acque a sostenersi dall' argine proverranno da un fiume, o da un torrente, i quali abbiano i letti molto variabili; come succede generalmente pei torrenti e pel tronco superiore dei fiumi, segnatamente in quelli di gran portata e torbidi, a stabilire la traccia dell' argine si procurerà di aspettare, quando i medesimi letti sarranno stabiliti od almeno, quando si sarà fatto un certo periodo nella loro variazione, onde prevedere le successive, per non costurire l' argine immediatamente in pericolo di essere attaccato dalle medesime correnti: anzi in queste occasioni bisognerà ricordarsi, che comunque

diverse e grandi possano essere le variazioni del letto di una corrente, nonostante, esso si mantiene generalmente fra due date linee, dalle quali difficilmente sorte; dimodochè, qualora le circostanze lo permetteranno, ottima cosa sarà il costruire l' argine fuori dello spazio compreso fra queste linee medesime.

Deciso poi che si debba stabilire la traccia di un argine, si procurerà di farlo in modo che tra l' argine a costruirsi e la prossima sponda della corrente rimanga una lista di terra di tale larghezza che da essa si possa prendere la terra per formare l' intero argine od almeno una gran parte. Questa lista di terra, la quale si chiama *golena*, servirà anco oltre all' uso di restara ad assicurare l' argine dalle immediate corrosioni, ed a lasciar luogo alla soprabbondanza delle acque in caso di piena di scaricarsi, senza troppo caricare l' argine medesimo.

Così si procurerà di non piegare inferiormente la traccia dell' argine in modo di volgere, la concavità verso le correnti, avendo di mira anco quelle, che potranno aver luogo nei tempi delle piene dell' acqua a sostenersi, altrimenti si insaccheranno dall' argine le acque con pregiudizio di esso: anzi si cercherà di tenerla in linea retta più che sarà possibile, e dovendola piegare assolutamente, le piegature si faranno ampie ossia insensibili, onde menomare le spinte, che potranno provenire dallo forzo delle correnti sostenute dall' argine, stantechè le acque correnti, anco lambendo le scarpe degli argini, esercitano contro questi degli sforzi, i quali crescono, ammesse le altre cose pari, col diminuire i raggi

tura delle linee descritte da esse, come risulta da alcune cose dette altrove. In generale poi bisognerà procurare di stabilir la traccia in maniera che l'argine risulti *soprastante*, od al più *latterale* e non mai *soggiacente*; vale a dire che esso risulti divergente od al più parallelo al filone della corrente a sostenersi, ma non mai concorrente con esse: come pure che abbia la maggior distanza da quei punti delle sponde delle medesime correnti perenni, i quali sono attualmente in corrosione.

Similmente, non si faccia mai la traccia dell'argine parallela ai fossi od alle roggie interne, quando non si possano otturare, perchè essi richiamerebbero le correnti, o farebbero nascere le così dette *chiamate d'acqua*, con pregiudizio dell'argine; come pure si faccia essa traccia lontana più che si può dai borri, dalle profonde morte d'acqua, dai fossi non turabili, siano essi dentro o fuori; e particolarmente da questi ultimi quando siano interni, se le acque contenute in essi non siano per alzarsi contemporaneamente a quelle che saranno sostenute dall'argine; altrimenti la grande pressione, che avrà luogo naturalmente per loro cagione nei tempi delle piene, sottoporrà l'argine a sostenere anco quest'altro sforzo.

Colla traccia si procurerà di non passare sopra roggie o fossi che non si possano chiudere, onde non obbligarsi a fabbricare delle chiaviche a ciò necessarie; perchè queste opere, oltre al costare assai, sono sempre pericolose per le arginature, particolarmente se si fanno di legno. Così si procuri di non attraversare terreni, i quali siano stati fondi di

paludi anco asciugate ma da poco tempo, giacchè le parti di un argine costruito su questi terreni, si staccherebbero facilmente le une dalle altre. Similmente colla traccia di un argine bisogna evitare di attraversar i terreni cuorosi, cioè quei terreni che sono un composto di legni, foglie, erbe, ecc. marcite insieme, i quali sono spongosi e leggeri a segno che alcuni di essi gallegiano sull' acqua: generalmente i terreni paludosi resi buoni per la coltivazione colle bonificazioni o colle torbide hanno i fondi a qualche profondità cuorosi: come pure si procuri di non passare colla traccia in mezzo a terreni composti di più strati di terre differentissime, particolarmente se alcuni strati siano di argilla ed altri contigui di sabbia o di ghiaja: come sono alcune alluvioni del Po.

Per iscoprire questi ultimi difetti, ossia per conoscere sino a certa profondità quel terreno sul quale si dovrà erigere l' argine, si farà il *saggio* o *tentamento* di esso mediante alcuni pozzi scavati giudiziosamente quà e là nel piano della campagna, ovvero anco colla nota Trivella gallica; e nel fare questi tentativi, per evitare la confusione dei risultamenti, sulla carta si segneranno opportunamente le posizioni dei luoghi rispettivi, e si terrà nota delle rispettive qualità delle terre scoperte in essi.

Ho nominato qui sopra varie specie di terreni, i quali riescirebbero cattive basi per un buon argine, ed ho per questo soggiunto, che si deve fare di tutto, onde evitare di attraversarli colla traccia richiesta; ma siccome alcune volte, a dispetto della sagacità di chi è incaricato a stabilire la traccia di

un argine bisogna attraversare assolutamente di siffatti terreni; così stimo utile l'avvertire, che in questi casi bisognerà indagare la natura di essi ad una profondità maggiore della ordinaria, per essere prevenuti di ciò che potrà succedere nel formare l'argine medesimo, onde poter dare agli assistenti le necessarie e relative istruzioni. Per esempio, dovendosi attraversare una palude oltre la cognizione dell' altezza dell' acqua e del fango sottoposto ad essa, bisognerà conoscere anco lo strato di terra esistente sotto a questo medesimo fango, giacchè accadde talvolta, che, a qualche profondità di questo strato di terra, il quale superiormente aveva le qualità per riescire una base discreta di un argine qualunque, si trovò altro strato sufficientemente consistente, il quale cedette, abbassandosi, alcune volte tutto in un tratto, con grande sorpresa dei curiosi astanti e degli assistenti ai lavori, non preveduti di questi accidenti; e con pregiudizio della fama di chi fece il progetto dell' argine medesimo.

Finalmente, nello stabilire la traccia di un argine, si abbia riguardo anco alla direzione, che le correnti tributarie dell' acqua a sostenersi hanno entrando in essa, tanto in istato di magra quanto in quello di piena, per la influenza che possono avere sulle correnti dell'acqua a sostenersi particolarmente nei tempi delle piene, onde evitare, come già si è detto, che l'argine insacchi le acque, o risulti *soggiacente*; e si procuri sempre di appoggiare l'argine su terreni sodi, e tenaci che sono i migliori per basi di essi. In generale per la buona scelta del terreno base di un argine può servire di

norma l'osservazione, che nei nostri paesi i terreni buoni pei prati asciutti sono anco i migliori per le basi degli argini.

Degli ostacoli insuperabili.

Fra gli ostacoli insuperabili io comprendo le Città, i Borghi, alcune fabbriche isolate ma cospicue, alcuni Borri e Valli stante le loro grande profondità, in fine alcuni Canali navigabili.

I primi fra questi ostacoli cioè le Città, i Borghi, e le fabbriche cospicue generalmente si vogliono difendere dalle innondazioni; e però si dovrà scegliere la traccia in maniera, che essi risultino fuori dell' argine; anzi sarà bene, che l' argine di fronte a questi caseggiati abbia da essi la maggiore possibile distanza per la loro salubrità, e perchè rimanga fra l'argine ed essi medesimi una distanza sufficiente onde potere lavorare liberamente sì intorno ad essi che all' argine stesso.

I Borri e le Valli suddette si procura comunemente che cadano dentro la linea dell' argine; giacchè, oltre che essi sono generalmente inutili, possono dare origine a grandi sorgive e nuocere con ciò alle campagne difese dall' argine oltre l' inconveniente di cui si è parlato superiormente: alcune volte però i Borri, quando siano destinati ad uso di peschiere, si chiudono anch' essi fuori della linea dell' argine.

In fine, dovendo attraversare col nuovo argine un canale navigabile, bisognerà passarlo colla traccia dove vi sia o si possa erigere un opportuno sostegno; ovvero arginarlo anch' esso: dovendo seguire

a quest' ultimo partito, bisognerà avere gran cura nello stabilire l' unione delle due arginature, stante le variazioni, che possono avvenire con facilità dove si incontrano due correnti.

Delle qualità della traccia perchè l' argine sia il più economico.

Se si potesse esprimere la spesa dell' argine coi parametri della sua traccia, tutta la difficoltà presente si ridurrebbe alla determinazione di questi parametri, in modo, che rendessero minima la spesa stessa, quistione la quale sarebbe puramente analitica, ma siccome ciò è assolutamente impossibile nello stato attuale di queste materie, così saranno utili le seguenti avvertenze generali.

Le prime cose, che si presentano, pensando alla determinazione della traccia di un argine qualunque, quando si ha di mira la sola economia, dopo la lunghezza di essa traccia, sono, le alture delle campagne, la qualità della terra che si dovrà usare per formarlo, e la distanza fra l' argine a costruirsi ed i luoghi dove converrà cavare la medesima; giacchè quanto più grandi saranno le alture, che si potranno attraversare colla traccia, quanto migliore per la formazione dell' argine sarà la terra circostante, e minore la distanza del trasporto di essa, e la lunghezza della traccia medesima, altrettanto più piccola riescirà evidentemente la spesa per la formazione dell' argine.

Oltre le quattro cose qui dichiarate, nello stabilire la traccia di un argine, volendo l' economia,

si debbono avere di mira anco le casucce, le piante che si dovranno atterrare, come pure il guasto delle biade, e particolarmente la qualità del terreno che si dovrà occupare coll'argine e coi cavi; e tutto onde regolare la direzione della traccia in modo che la somma dei valori di queste cose riesca la minima non mai perdendo di vista quelli delle quattro anzidette.

Nella determinazione della traccia di alcuni argini bisognerà aver riguardo anco alle posizioni delle chiaviche a farsi sui fossi o roggie che si dovranno assolutamente ritenere ed attraversare coll' argine stesso, ai rivestimenti delle sponde delle acque per renderle atte a sostenere il peso dell'argine, e procurare che riesca minimo il loro costo; come pure bisognerà aver d'occhio i terreni cuorosi, i pantanosi, e quelli composti di striscie di terre differentissime l' una dall' altra; perchè dovendoli all' occorrenza cambiare, ovvero dovendo per sicurezza ingrossare di più l' argine, si aumenterà la spesa necessaria per formarlo. Similmente non bisognerà perder di vista la spesa nella quale si impegnerà il proprietario dell' argine per la costruzione di qualche opera voluta dalla scielta di una piuttosto che di un' altra linea per traccia di esso. In fine, non si dimenticheranno le manutensioni delle opere a costruirsi, giacchè possono anch' esse variare, variando la linea che si sceglie per traccia dell' argine, come è facile a concepirsi.

Dei luoghi dai quali si dovrà prendere la terra per formare l' argine.

Il buon esito e l' economia di un argine dipenderà in gran parte da certe proprietà dei luoghi dai quali si prenderà la terra per formarlo; di queste proprietà, alcune si riferiscono alla posizione ed altre alle dimensioni dei luoghi stessi. Io qui incomincierò ad esporre le principali di queste proprietà fra quelle relative alla posizione di questi luoghi, e poscia esporrò rispetto alle loro dimensioni ciò che ancor manca, avuto riguardo a quanto ho già esposto nelle proposizioni ventisettesima e ventottesima della parte antecedente.

La terra per formare l' argine si procurerà di prenderla nella golena di esso, pei tristi effetti che potrebbero esser prodotti dalle pressioni, prendendola nella campagna esterna, ed anco per non guastare questa medesima campagna; e se la necessità imporrà di prenderla in questa campagna sarà bene che si prenda a quella maggior distanza dell'argine che sarà compatibile colle altre circostanze dall'opera.

Così i cavi a formarsi per costruire l'argine, dovendoli fare nella golena sarà bene che siano disposti a scacchi od almeno divisi gli uni degli altri da liste da terra non ismosse distanti l' una dall' altra non più di trenta metri circa; particolarmente si dovrà procurare di non formar con essi dei fossi, che nei tempi delle piene possano dirigere le acque contro od anco parallelamente all' argine: anzi converrà lasciare tra essi e l' argine una lista di terra a foggia di banchetta affatto intatta, della maggior

larghezza compatibile colle altre circostanze, non mai sì ristretta però, che la sua faccia superiore riesca minore di tre quarti di un metro; e se la terra componente questa ultima lista non sarà sufficientemente resistente, sarà bene che si faccia con terra migliore. Similmente, fra i cavi e la più prossima sponda dell' acqua corrente, si procurerà di lasciare un'altra lista di terra anch'essa non toccata, però di poca altezza: questa lista di terra od arginello agevolerà le deposizioni delle terre trasportate dall' acqua, e con esse si tureranno i cavi anzidetti, il che avverrà anco in poco tempo, se le acque a sostenersi dall' argine saranno molto torbide.

Rispetto alle dimensioni dei cavi, che si debbono formare per costruire un argine, è una massima ragionevole ed universalmente ricevuta di abbondare nella loro estensione orizzontale anzichè nella profondità, segnatamente se essi si debbano fare nella campagna per la difesa della quale si voglia costruire l' argine medesimo; però tutto si deve contrabilanciare colla spesa del trasporto delle terre, per cui non si dovrà perdere di vista la loro distanza dall' argine, la quale dovrà essere la minima accoppiabile con tutte le altre condizioni necessarie. Tutto quello poi, che si potrebbe dire di preciso rispetto alle dimensioni dei cavi medesimi, si è già detto nelle proposizioni sopra citate.

Ora, avendo presenti tutte le cose esposte, sì per la traccia che pei cavi, si fisseranno nella campagna, od almeno sulla carta del luogo, due o più linee per ciascuna delle quali, considerata come traccia di un argine puramente ideale o fittizio, il com-

plesso dei difetti inevitabili presumibilmente riescirà un minimo: fatto questo, si determineranno i differenti profili dei medesimi argini; indi avendo riguardo alle maniere di costruirli, si troveranno le spese a ciò necessarie, come si dirà fra poco. Quindi si sceglierà per traccia dell' argine a costruirsi effettivamente, quella fra le dette linee fissate o stabilite il cui argine ideato sarà risultato il più economico, contando anco la manutensione di esso e quella delle opere dipendenti.

Questa è la regola generale, che si potrà sempre seguire per iscoprire quella fra le suddette linee stabilite, che converrà ritenere per traccia effettiva dell' argine a costruirsi; generalmente però per lo scoprimento di questa linea non si avrà bisogno di ricorrere ad essa regola, giacchè si concepirà facilmente, senza verun calcolo, quale sarà fra i detti argini fittizj il più economico, e conseguentemente la linea da preferirsi per la traccia richiesta.

Determinata la traccia dell' argine a costruirsi ed anco i suoi differenti profili, onde evitare la confusione, ed anco perchè non si smarrisca l' andamento di essa, si faranno levare tutti quei segnali messi per indicare provvisoriamente le altre traccie fittizie; ed all' opposto si faranno porre su di essa dei segnali di qualche rilievo, particolarmente in quei punti di essa nei quali l' argine dovrà avere profili differenti. Questi ultimi segnali generalmente consistono in pichetti, o picciole colonne, ovvero in antenne fissate, se occorre al terreno, mediante piccioli pilastri costruiti appositamente; alcune volte però, varii di essi consistono in piante vive di grosso fu-

sto, esistenti per accidentalità nella traccia stessa, le quali si distinguono dalle altre col fare sui loro fusti delle particolari incisioni.

Qualunque sia però la qualità di questi segnali importantissimi posti sulla traccia determinata, se vicino ad essa vi saranno degli oggetti assolutamente stabili, come sono alcuni muri, sarà ottima precauzione quella di misurare le distanze necessarie fra questi oggetti ad alcuni punti importanti della traccia medesima; affinchè si possa in qual si voglia evento trovare con facilità ed esattezza almeno questi punti di essa.

Tutto ciò poi che si è qui detto della traccia dell'argine a costruirsi, si deve estendere anco ai rispettivi luoghi dai quali si dovrà prendere la terra per formare il medesimo: però, siccome la posizione di questi luoghi, non è di tanta importanza, come quella della traccia dell' argine, così non occorrerà pei segnali da porsi in essi quella precisione e stabilità, che si richiede per quelli collocati sulla traccia stessa.

PARTE QUINTA.

Della costruzione di un Argine.

Nelle parti precedenti ho esposto ciò che è necessario e sufficiente per compilare il proggetto di un argine qualunque, quando ad esse si unisca la parte che segue la presente; ed in questa esporrò le precauzioni necessarie per conseguire la migliore costruzione di esso.

Egli è evidente che la mira principale, nel costruire un argine già progettato, onde la sua costruzione riesca la migliore, dovrà essere di conseguire quella unione fra le sue parti non che quella di esso colla sua base, che saranuo le maggiori ottenibili colle terre, che si potranno porre al contatto le une delle altre, senza allontanarsi dal progetto dell' argine medesimo; quindi, per le persone incaricate a dirigere la formazione di un argine, interessantissima sarà la conoscenza di quelle proprietà di una terra qualunque, dalle quali dipenderanno, la massima unione fra le parti di un mucchio costituito con essa, e quella del mucchio stesso colla sua base; giacchè col mezzo di questa coguizione, le dette persone potranno all'uopo procurare all'argine le suddette due ottime qualità.

La massima unione fra le molecole di un mucchio di terra e quella di esso colla sua base dipenderanno, come è facile a concepirsi, dalla specie della terra sulla quale sarà esso eretto, dalla qualità della terra colla quale esso sarà costruito, dal grado di stritolatura ed umidità di essa, ed anco dall'ordine successivo che si terrà nel formarlo; per tanto, volendo conoscere per un mucchio di qualsivoglia terra le cause delle suddette unioni d' uopo sarebbe indagare primieramente per qualunque specie di terra qual parte abbiano in ciò, i differenti gradi di umidità, quelli della stritolatura di esse, ed anco l'ordine successivo delle operazioni necessarie per formarlo. Ma siccome per condurre queste indagini al punto di essere utili mancano ancora molti dati, e d' altronde una chiara esposizione delle cose

a me note su questo proposito mi obbligherebbe a più ripetizioni affatto inutili per la costruzione di un argine; così stimo meglio di limitarmi ad esporre quelle fra queste ultime cose, che potranno essere utili immediatamente a chi dovrà dirigere la costruzione di un argine, e di seguire nella loro esposizione quell' ordine stesso, che si potrà anco effettivamente praticare nel costruire un argine ordinario.

Le stagioni piovigginose sono le migliori per la formazione di un argine; giacchè le terre comuni, quando siano leggermente inumidite, come appunto sono in queste stagioni, si uniscono generalmente fra loro meglio di quando esse siano asciutte o molto bagnate. Comunemente però, quando il bisogno dell'argine non sia urgente, esso si fa costruire in quei tempi, nei quali i contadini del luogo, ove esso si deve erigere, hanno pochi lavori essenziali per le campagne circostanti. È però sommamente utile, che l' argine si faccia in tempo da potersi assodare, prima che vi si appoggi dell' acqua, onde non esporlo immediatamente al pericolo di esser rotto, pel minimo sinistro accidente, come accadde alcune volte, quando non si ebbe questa utilissima precauzione.

La formazione di un argine, il quale debbe sosteuere delle acque correnti, si incomincierà sempre verso l' origine delle correnti stesse e non verso lo sbocco delle medesime; perchè, se mai per disavventura, nel tempo della sua formazione succedesse qualche piena delle stesse correnti, le acque di esse si troverebbero almeno per un tratto già incanalate, e la porzione d' argine in costruzione meno assodata, si troverebbe così meno esposta al pericolo di essere

smossa ed anco perchè la parte d'argine già costruita, non impedirebbe alle acque sparsesi sulle campagne esteriori di ritornare, senza gravi inconvenienti, al canale al tempo della loro decrescenza; vantaggi tutti, che non avverrebbero, se si incominciasse la formazione di questi argini verso quei luoghi ai quali sono dirette le stesse correnti. Pel contrario, si dovrà incominciare la formazione dell'argine dalla banda di questi luoghi, quando esso si debba costruire per alzare le sponde di un fosso fatto per dare lo scolo ad acque sparse quà e là sulla campagna; perchè, se in questo caso si facesse altrimenti, coll' asciugarsi le campagne superiori, si aumenterebbe l'acqua sulle inferiori con danno loro e della costruzione di esso, ed all' opposto accade incominciandolo, come ho detto di fare.

L'argine si dovrà costruire assolutamente, secondo la traccia ed i profili già stabiliti ed approvati dai capi; e se si credessero opportuni alcuni cambiamenti o nella traccia ovvero nei profili, od anco nei luoghi da cui si dovrà trarre la terra necessaria per formare l'argine, essi non si faranno senza permesso di chi avrà approvato il proggetto di esso o di chi ne farà le veci.

Prima di incominciare l' effettiva costruzione di un argine si debbano fare alcune operazioni preparatorie al terreno che dovrà essere base di esso, ed anco a quelli dai quali si dovranno trarre le terre per formarlo: le principali di queste operazioni sono le seguenti.

Se le superficie degli spazj, che debbono essere occupati dalla base dell' argine e dai luoghi dai quali

si dovrà prendere la terra per formare il medesimo, saranno molto erbicate, si faranno delle zolle erbose ossiano piote, e queste si conserveranno in luoghi opportuni sino alla fine dell' opera, le quali poi si porranno dove si dirà a suo tempo: per altro, qualora al tempo della formazione dell'argine le campagne fossero coperti di neve o di ghiacci, converrebbe prima di tutto levare queste materie da entrambi i detti luoghi, cioè sì dai luoghi dai quali bisognerà prendere la terra, che da quello che dovrà servire di base all'argine: la ragione è per sè evidente.

Si demoliranno tutte le casucce di cui sia stabilita assolutamtnte la distruzione, particolarmente quelle situate nella base dell' argine a costruirsi; e si traslocheranno altrove i loro materiali.

Si atterreranno immediatamente tutte le piante sì di grosso che di picciolo fusto situate nella base dell' argine, ed anco quelle situate nei luoghi dentro la linea dell' argine da cui si dovrà prendere la terra per formarlo, particolarmente se esse saranno grosse, o picciole ma spesse; giacchè queste scalzate, facilmente sarebbero rovesciate dall' acqua, e le grosse perchè ristringerebbero i passaggi all'acqua medesima e produrrebbero dei vortici, il che non suole accadere senza danno dell' argine: e sì le une che le altre si faranno trasportare nella campagna esterna, se così piacerà ai loro proprietari.

Si smoverà la terra base dell' argine e quella dei luoghi dai quali si dovrà trarre la terra per formarlo, ed entrambe alla profondità di tre o quattro ed anco di cinque decimetri, quando il fondo sia sabbioni-

cio usando aratri o vanghe oppure zapponi; e si spurgheranno ambedue, dalle erbe, dalle foglie, dai virgulti, e dalle radici. Alcuni pratici fanno anco scavare lungo la base dell' argine due o tre piccioli fossi, onde il corpo dell' argine si unisca meglio alla sua base; ed appunto con ciò conseguiscono l' ottimo loro fine. Questi fossi sono vantaggiosi segnatamente, quando il terreno della base sia eccessivamente argilloso, o ghiajoso; giacchè nel primo caso con questi fossi si diminuisce il pericolo, che l' argine soffra qualche screpolatura nei tempi delle grandi umidità e molto più in quelli delle lunghe innondazioni; e nel secondo si rende più difficile la filtrazione, che ordinariamente ha luogo, quando la base sia ghiajosa, e che non si levi un certo strato di essa prima di costruire l' argine.

Dal terreno base dell' argine si debbano cavare le radici degli alberi di grosso fusto atterrati per fare l' argine medesimo, od in altre occasioni, e traslocarle nella campagna esterna; e se vi saranno fossi, o borri, ovvero lanche presso la base dell' argine, e molto più se saranno nella base stessa, primieramente si farà il loro spurgo, e poi si interreranno con tutti quei riguardi, che si dovranno avere nel formare un argine, e che si dichiareranno qui sotto: segnatamente questa operazione si farà pei fossi, se essi saranno interni alla linea dell' argine e paralleli o convergenti con essa; giacchè questi in caso di piena darebbero origine, come si è già detto e ad altrettante chiamate d' acqua, le quali riescono sempre nocevoli all' argine.

Così, se la scarpa interna dell' argine si dovrà erigere assolutamente sul ciglio della sponda di qualche fiume o torrente o catino d'acqua, prima di incominciare la formazione dell' argine bisognerà assicurarsi se questa sponda sarà in istato di sussistere e sostenere la porzione del peso dell' argine cadente su di essa, altrimenti converrà ridurvela, rivestendola od anco facendola interamente artificiale; giacchè senza di questa precauzione essa potrebbe nel seguito cadere nell' acqua, e con ciò mancando la base necessaria all' argine costruito, questo rovinerebbe anch' esso, come è ben naturale. Similmente, se qualche tronco d'argine si dovrà assolutamente erigere sopra un terreno soffice o paludoso, qualche volta converrà una palificazione onde rendere il terreno medesimo sufficientemente compatto; bisognerà però avere la precauzione di usar pali che non marciscano facilmente cioè in poco tempo.

Qualora l' argine a costruirsi sia di grandisssima importanza, come sono generalmente tutti, ma particolarmente quelli che insieme alle sostanze difendono anco la vita dei circostanti, nella sua base si scambieranno in terre buone le terre cuorose ed anco le liste di pura sabbia o ghiaja, se siano fra terre argillose; e se ciò non converrà per la loro grande profondità, si scambierà in terra buona almeno un loro strato superiore dell' altezza di un mezzo metro od anco di tre quarti di metro. Così, se nella campagna scelta per base di un argine qualunque, vi saranno rottami di fabbriche, essi si faranno trasportare fuori della base medesima ad una distanza da essa sufficiente, perchè non impediscono di lavorare

all' occorrenza intorno alle scarpe dell'argine stesso; anzi il miglior partito sarà quello di traslocarli nella golena, ed ultimato l' argine fargli porre nei cavi formati coll' estrarre la terra impiegata nell' argine stesso. Qualunque siano poi le operazioni che si debbono fare per preparare la base di un argine si procurerà sempre che essa non risulti inclinata verso la campagna esterna, cioè che essa non sia più alta verso l' acqua che dall' altra banda.

Condotto il lavoro della base del futuro argine, e quello dei cavi a questo punto, e preparati anco i legnami per formare i modelli o le sagome dei differenti profili, anzi preparati i modelli stessi, colla massima attenzione si porranno questi ai rispettivi luoghi già indicati sulla traccia con aste o pichetti ovvero con altri mezzi tutt' ora esistenti, affinchè l' operajo possa con somma facilità regolare il suo lavoro precisamente, come è stabilito nei disegni del progetto e non altrimenti; e poscia si faranno levare tutti quei segnali anzidetti messi per indicare la traccia stessa, eccettuati alcuni, i quali si potranno levare di mano in mano, quando l'argine sia di una grandissima estensione, che progredirà la formazione dell' argine medesimo. Quando l' argine sarà molto alto e l' argo, in vece degli interi modelli dei suoi differenti profili, per economia converrà porre i modelli delle sole scarpe dei medesimi profili, ben inteso però che si dovrà empire interamente lo spazio compreso fra questi e fare la faccia superiore orizzontale.

Tanto nel caso che si usano le sagome degli interi profili quanto in quello che si usano le sagome

delle sole scarpe, se i punti successivi nei quali i profili sono differenti l' un dall' altro riescano distanti più di cento cinquanta metri, converrà porre due o più di queste sagome eguali fra loro; perchè è bene che la distanza dall'una sagoma all'altra non sia, giammai maggiore di cento cinquanta metri circa, affinchè gli operaj possano con facilità costruire ogni tronco dell' argine colle dimensioni volute.

Stabilite o fissate sulla traccia le sagome anzidette, prima di dar mano alla vera formazione dell'argine, ottima precauzione è quella di alcuni periti di verificare se esse hanno tutte le dimensioni volute ed anco se si sono poste dove si richiedeva, onde evitare le contestazioni e non essere obbligati a fare delle aggiunte al corpo di terra già costruito affine di conseguire l' argine richiesto.

Qualunque sia la terra destinata per la formazione del nuovo argine, prima di porla a far parte di esso, si dovrà *sminuzzare* o *stritolare*, e nettare dalle erbe, foglie, radici, rottami, paglie, zolle erbose se ancora nol sarà, ed anco dalle nevi e ghiacci; insomma la terra portata in argine dovrà essere purgata da ogni materia ad essa estranea, e per quanto sarà possibile tutta della medesima specie, non gelata, ed ottimamente stritolata. Siccome poi le terre leggermente inumidite si uniscono molto meglio fra loro, o come si suol dire comunemente, si maritano meglio delle aride; per tanto, se la terra colla quale si dovrà formare l' argine sarà eccessivamente arida, e l' argine importantissimo, converrà bagnarla qualche poco anco appositamente; però se la stagione della formazione dell' argine sarà molto fredda, si

dovranno usare tutte le cautele necessarie per non seppelire infinite pallettine di ghiaccio invece di goccioline d' acqua, dal che risulterebbe un argine cattivo. Come pure si badi bene dal far l'argine con terre eccessivamente bagnate, perchè fra i diffetti a cui un siffatto argine potrebbe andar soggetto vi sono le crepature.

Il trasporto delle terre in argine si fa con badili o pale a mano, o con barelle o carriuole di trasporto, carrette, barozze, carri, ruzze o raggie, cestini o sportini o gerletti, ed alcune volte anco con sacchi e con barche. Le ruzze ed i carri si usano solamente per formare i primi cordoli o strati, le barche quando col trasporto delle terre si debbano attraversare delle acque profonde, particolarmente se si debbano prendere le terre a molta distanza dalla base dell'argine; le carrette e le barozze per formare i primi cordoli ed anco gli altri tutti, se le vie di trasporto non siano molto ripide; gli altri poi dei nominati strumenti sono buoni per formare un cordolo qualunque.

Prima d' incominciare il trasporto della terra per formare un argine di una grande estensione, sarà bene, che esso si divida in più tronchi ciascuno di una certa lunghezza, per esempio di dieci, o quindici, ed anco di venti metri, che si affidino le loro costruzioni a differenti società di operaj, e si indichi a ciascuna dove dovrà prendere la terra per formare il tronco rispettivo; che si imponga a ciascheduna di esse di alzare il suo tronco, cordolo per cordolo regolarmente, e non a piccioli tronchi o strati inclinati all' orizzonte; di fare ciascuno di questi cordoli alto circa due decimetri, se il trasporto si farà dagli uo-

mini con barelle, o carriuole ecc, e non più di quattro decimetri qualora si faccia con barozze, o carrette, o carri tirati da bovi oppure da cavalli; in fine, che si imponga alle medesime società, di stritolare la terra di ogni cordolo, qualora già nol sia, indi di spianarla ossia accomodarla per formare il cordolo dal quale dev' esser parte, e per ultimo di follarla o pestarla convenientemente.

Per conseguire però tutte le differenti operazioni qui nominate, particolarmente le ultime, si destineranno appositamente alcuni uomini a stritolare, spianare od accomodare di mano in mano la terra di ogni cordolo, ed altri a follarla o pestarla: quelli fra questi uomini, che spianano la terra di ogni cordolo, comunemente si chiamano cordolieri o spianatori, e gli altri pilonatori o pestatori, ed insieme si denominano stritolatori-spianatori-pestatori, come noi abbiamo già fatto tacitamente alla fine della parte terza.

Un provvedimento da non dimenticarsi da chi dirigerà l' effettiva costruzione di un argine egli è quello di obbligare chi trasporta la terra a passare su tutti i punti dei cordoli già formati, giacchè così si folleranno talmente questi ultimi cordoli da disporli ad una buona unione coi successivi; più con ciò si potranno anco risparmiare alcuni stritolatori.

Il numero dei cordolieri e dei pestatori rispetto agli altri operaj si determinerà colle regole esposte alla fine della parte anzi citata, cioè avendo riguardo alla lunghezza del trasporto della terra ed alla qualità di essa; giacchè, quanto meno o più lunghe

saranno le vie del trasporto, quanto più o meno grande sarà lo spianamento e lo stritolamento e pestamento richiesto dalla natura della terra e dell'opera, dovrà essere correlativamente più o meno grande il rapporto, fra il numero sì dei pestatori, spianatori, che degli stritolatori, al numero di quelli che eseguiranno l'effettivo trasporto e caricheranno gli strumenti, cioè al numero dei trasportarori, e degli scavatori-caricatori. Generalmente nei trasporti delle terre per formare argini importanti, il numero degli spianatori eguaglia quello degli stritolatori-pestatori, e ciascuno di questi nnmeri non è minore di un decimo del numero totale degli uomini impiegati nella formazione dell'argine, inclusivamente gli scavatori-caricatori.

Gli argini si possono fare eseguire, come qualunque altro lavoro, a giornata ovvero a cottimo: quelli fatti a giornata, quando cioè la mercede degli operaj consista in un tanto al giorno, senza nessun patto relativo a quanto essi debbano fare, risultano generalmente i migliori. Nella formazione di un argine, gli uomini destinati a scavare e caricare ed a trasportare la terra si potranno indifferentemente impiegare in entrambe le dette maniere; gli altri però, cioè gli stritolatori-spianatori-pestatori dovranno essere assolutamente a giornata.

Se è bene che la terra di ogni cordolo sia pestata sufficientemente altrettanto sarebbe nocevole, se lo fosse eccessivamente, cioè tanto di rendere la superficie superiore di ogni cordolo compatta e liscia, giacchè in tal caso le terre dei cordoli conti-

gni difficilmente si unirebbero, come si richiede in queste opere.

Alcuni pratici vorrebbero, quando la terra colla quale si deve formare l' argine sia di cattiva qualità, e l' argine di molta importanza, vorrebbero dico, che si facesse il primo cordolo, e poi si lasciasse passare qualche tempo; indi si facesse il secondo cordolo, ecc; è meglio però farlo tutto di seguito, purchè le terre dei cordoli siano stritolate, spianate, e pestate o follate convenientemente. I medesimi pratici vorrebbero anco, che si prescrivessero ai pilonatori le dimensioni dei piloni ossiano pestoni ad urarsi: io prescriverei anco la forma della faccia inferiore, facendola a più punte di diamante, precisamente come sono gli impronti di certi sigilli.

Se bisognerà permettere agli uomini trasportatori, onde formare i superiori cordoli dell' argine, di costruirsi delle strade per salire o per discendere od anco per attraversare la parte d' argine già costruita, prima che essi alzino queste picciole strade si obbligheranno a smovere i loro fondi, affinchè le terre che di mano in mano vi si porranno sopra, si possano unire convenientemente coi fondi o piani delle medesime. Così, se i tronchi nei quali si è detto di dividere l' argine a formarsi non si potranno alzare tutti contemporaneamente, bisognerà lasciare irregolari le teste dei primi ad alzarsi, e raccomandare a quegli uomini, che faranno gli altri, le unioni di questi coi loro contigui.

Se l' argine si farà cogli sportini o cestini e la terra sia già stritolata, si procurerà che gli uomini trasportatori nello scaricarsi accompagnino collo spor-

tino il carico sino presso al suolo, sul quale dovranno porlo; acciocchè cadendo questo unito, si prema o calchi col proprio peso: pel contrario, se la terra non sarà ancora stritolata, sarà anzi bene, che i trasportatori facciano in modo che nel cadere la si sparpagli onde facilitare il lavoro degli stritolatori spianatori.

Quando un argine si dovrà fare per sostenere delle acque provenienti da qualche corrente, il cui letto possa variare non si dovrà frapporre gran tempo tra la formazione del progetto e la costruzione effettiva dell'argine stesso; perchè indugiando, potranno accadere tali variazioni nel letto medesimo, di rendere l'argine a costruirsi, se non nocevole, almeno inutile, ciò che alcune volte accadde, sebbene non mancassero a ciò le necessarie cognizioni, tanto a chi formò il progetto, quanto a chi lo approvò.

Le situazioni degli argini generalmente sono tali, che, per non interrompere le comunicazioni fra le campagne e le case circostanti, bisogna per l'ordinario costruire contemporaneamente agli argini medesimi alcune strade per salirli, o discenderli, od anco attraversarli. Queste strade, le quali si chiamano comunemente *salite* le prime, *calate* le seconde, e *traverse* le ultime o promiscuamente *terrapienature* o *rampe* di ascesa o di discesa debbano consistere in corpi di terra uniti ed impigliati a quegli degli argini, senza punto alterare le dimensioni di questi; ed affinchè i contadini non abbiano interesse di variarle, il che difficilmente accadrebbe

senza danneggiare gli argini stessi, debbano essere comode; vale a dire ciascuna di queste strade deve essere collocata dove i bisogni la richieggono; deve avere i marciapiedi e la parte di mezzo talmente disposta che fra le rette situate in essa prescindendo dal suo cappello, le più inclinate coll' orizzonte risultino parallele alla sua linea di mezzo longitudinale; infine deve avere la pianta molta estesa rispetto all' altezza corrispondente dell' argine.

Le cose principali che si dovranno aver di mira nel determinare le dimensioni di queste strade saranno in generale le due seguenti; cioè in primo luogo l' uso di esse, vale a dire se dovranno servire per pedoni, o per bestie, o per carri e vetture come accade comunemente, ed anco se dovranno essere molto o poco frequentate; in secondo luogo il loro costo totale, cioè la spesa per costruirle e mantenerle in buon stato, ed il valore del terreno da occuparsi con esse: e l' Ingegnere avveduto dovrà stabilire le loro dimensioni in modo di conseguire complessivamente il massimo vantaggio. Comunemente la pianta o la base di queste strade, quando debbono servire per carri, non è minore di sei volte l' altezza corrispondente dell' argine; anzi essa base si fa molte volte di una lunghezza eguale a dodici volte ed anco più, l' altezza dell' argine. Quella poi di ogni loro scarpa, quando la terra sia di buona qualità, è bene che sia almeno eguale a tre metà della rispondente altezza; e molto di più qualora sia di cattiva qualità, per esempio sabbioniccia. Facendo queste strade con tutti i detti riguardi, si aumenta con esse assai la stabilità del tronco d' argine al quale sono impigliate.

Quelle fra le salite o calate che si dovranno fare verso la campagna esterna, e le cui posizioni non saranno prescritte dagli usi a cui verranno destinate, si procurerà di stabilirle dove l'argine richiederà la maggiore stabilità; le altre poi, cioè quelle che si dovranno costruire dalla parte interna sarà bene collocarle dove l'acqua a sostenersi probabilmente avrà la minor velocità, e fare le loro scarpe con le maggiori basi compatibili colle altre circostanze. Generalmente queste ultime, qnalora i cavi a formarsi coll' estrarre la terra da porsi in argine debbano essere paralleli all' argine medesimo, si appoggiano alle liste di terra lasciate intatte a traverso ai medesimi cavi; e si stabilisce la comnnicazione fra questi medesimi cavi col mezzo di alcuni piccoli ponti: quando convenga piuttosto questo partito, che l' altro di discendere colla rampa di queste ultime strade sino al fondo dei cavi, non sarà difficile a determinarsi per ogni caso particolare.

Alcune volte la conoscenza adequata delle effettive strade in quistione, o quella dei loro disegni richiede lo scioglimento della seguente proposizione, e però credo bene di esporre qui sotto una soluzione di essa.

« Data la $ABHG$ (fig. 58, Tav. VII.) pianta o base
» della scarpa dell' argine, e l'altezza del medesimo,
» non che la $CDEF$ pianta od icnografia della rampa
» di una strada per salire o discendere dal medesimo,
» ed anco la inclinazione che deve avere coll'orizzonte
» ogni scarpa di questa strada; trovare la $MFEL$
» base di essa, e le CM, DL icnografie delle linee
» comuni alle sue scarpe ed a quella dell'argine.

Si faccia CP perpendicolare alla AB ed eguale alla altezza dell'argine, si tiri la retta PI, che colla IC comprenda l'angolo PIC eguale alla inclinazione, che deve avere coll'orizzonte ogni scarpa della strada; indi descrivasi l'arco circolare In col centro C e col raggio CI, e poscia l'arco rs pure circolare, col centro nel punto di mezzo della CF e col raggio eguale ad una metà di questa medesima retta; in fine si unisca il punto F al segamento N di siffatti due archi, ed il punto M comune alle rette GH, FN si congiunga al C colla retta CM: determinando le due rette LE, LD, come si sono determinate le FM, MC, nel quadrilatero $LEFM$ si avrà la base dimandata, e nelle rette CM, LD le icnografie delle sezioni comuni alle scarpe della strada ed a quella dell'argine. Vale a dire, nell'esagono $CDLEFM$ si avrà l'intera icnografia della strada di salita o di discesa di cui si parla.

Di fatto, si immagini il cono retto avente il cerchio.. INn.. per base, l'asse verticale ed eguale alla CP: similmente, si immagini il piano, che passa per la FM e per quel ciglio della strada, il quale ha l'icnografia nella retta CF. Questo piano passerà evidentemente per quel lato del cono, che ha per icnografia la retta CN; e però, siccome la FN è tangente il circolo.. INn..; così sarà esso piano tangente il cono stesso; e conseguentemente farà esso coll'orizzonte un angolo eguale al CIP, come ogni lato del cono. Adunque, siccome il piano immaginato, il quale passa per quel ciglio della strada, che ha la retta CF per icnografia ed anco per la FM, fa coll'orizzonte un angolo eguale a quello che

deve fare ogni scarpa della strada; per tanto la retta FM sarà la comune sezione alla scarpa della strada ed al piano orizzontale della campagna, e la MC l'icnografia di quella comune alla scarpa stessa ed alla adiacente scarpa dell' argine: così le due EL, LD saranno le analoghe linee dell'altra parte della strada medesima. Quindi $LEFM$ la base, e le rette LD, CM le richieste icnografie; appunto come si è sopra asserito.

Corollario I. Se fosse data l' altezza dell' argine, ed anco l' esagono $LDCMFE$; e si volesse l' inclinazione che ha coll' orizzonte quella scarpa della strada di salita avente la CFM per icnografia: tirata la CN perpendicolare sul prolungamento MN della FM, fatta $CI=CN$, e la CP perpendicolare alla DC ed eguale all' altezza dell' argine; indi unita la PI: evidentemente nell' angolo PIC si avrebbbe la inclinazione cercata.

Corollario II. Il triangolo rettangolo CFN dà

$$\text{sen}\, CFN=\frac{CN}{CF}=\frac{CP}{CF}\cot PIC;$$

formula colla quale si potrà determinare quell'angolo, che deve fare la retta FN colla data FC, mediante l' altezza dell' argine, la CF, e l' angolo d' inclinazione di ogni scarpa della strada coll' orizzonte; quantità tutte conosciute.

Corollario III. L' area del trapezio ordinario $LMFE$ occupato dalla base della strada in quistione è evidentemente eguale ad $FT\cdot EF+FT\cdot TM$; e però per essere $TM=FT$ tang. CFN, l'area stessa sarà data dalla espressione

$$FT \cdot EF + \overline{FT}^2 \text{ tang. } CFN,$$

la quale è formata colle quantità EF, FT, conosciute e colla tangente dell' angolo CFN attualmente conosciuto anch' esso.

Osservazione I. Il corpo della strada di cui si è parlato nella proposizione qui esposta essendo un prisma triangolare tronco, avente per ispigoli paralleli le rette CD, EF, LM, il volume o la solidità della terra componente la medesima sarà eguale ad un terzo di $CD + EF + LM$ moltiplicato per l' area della sezione fatta al medesimo prisma perpendicolarmente a suoi spigoli paralleli; e però ad

$$\tfrac{1}{6} FT \cdot CP \cdot (CD + EF + LM).$$

Osservazione II. In alcuni casi la rampa della strada di salita in vece di finire superiormente in un ciglio dell' argine, finisce in una retta orizzontale, che sega il medesimo ciglio; anco in questi casi, espressa, colla DCB l' icnografia di questa retta, colla DCF di nuovo quella della rampa, e coll' angolo CIP disegnato come sopra la inclinazione di quella scarpa della strada di salita che finisce nel ciglio di essa avente la retta CF per icnografia: si potrà determinare la CFM icnografia di questa scarpa precisamente come si è determinata per soddisfare la proposizione enunciata superiormente.

Ciò esposto ritorno allo scopo principale di questa parte.

Non avendo sufficiente terra buona per formare l' intero argine, si farà con questa una porzione di esso presso a poco prismatica triangolare, la quale abbia per una delle faccie la stessa scarpa interna dell' argine a costruirsi; e poscia si compirà l' argine

con qualunque altra terra, anco sabbiosa, dandole però sempre una scarpa esterna corrispondente. Per esempio, se *ABCD* (fig. 5, Tav. I.) fosse il profilo dell' argine intero, converrebbe fare di terra buona almeno una parte analoga alla *DCE*, lasciandovi la scarpa *EC* irregolare; indi compirlo ossia fare la parte rimanente *ABCE* con altra terra qualunque si fosse.

Onde l' operajo possa con facilità dare ad ogni scarpa la richiesta inclinazione coll' orizzonte, comunemente gli si dà uno strumento, il quale consiste in tre aste inflessibili *AB*, *BC*, *AC* (fig. 59, Tav. VII.) unite invariabilmente a foggia di un triangolo rettangolo, che ha l' angolo *BAC* eguale a quella inclinazione che deve avere la scarpa coll' orizzonte; giacchè, egli adattando il lato *AC* di questo strumento alla linea della massima pendenza della scarpa coll' orizzonte, non ancora ultimata, ed in modo che il piano del medesimo strumento si trovi verticale, ed essendo d' altronde informato, che la scarpa avrà coll' orizzonte la inclinazione richiesta, quando risulterà verticale anco l' asta *BC* opposta al detto angolo *BAC*, oppure orizzontale l' altra *AB*, egli collo smussare opportunamente la parte inferiore o la superiore della scarpa stessa, secondo le circostanze indicate dai modelli dei profili corrispondenti dell' argine, conseguirà facilmente la inclinazione desiderata.

La terra per formare l' argine si deve procurare di prenderla, come si è già detto, ad una distanza da quelle case, che rimangono in piedi, non minore di quattro metri; onde rimanga uno spazio fra esse

ed i cavi, sufficiente e necessario per la solidità e comodità delle medesime. Così si farà di tutto per non toccare quelle strade particolari, che servissero di comunicazione ai paesi o cassinaggi, od anco fra questi e le campagne rimaste in golena; e qualora si debbono toccare o distruggere, bisognerà ristabilirle o rifarne altre secondo le convenzioni approvate già dai superiori.

Se l'argine nuovo dovrassi unire ossia impigliare ad un vecchio tutt' ora sussistente, nei luoghi delle unioni loro si dovrà levare dalla scarpa del vecchio la cotica erbosa, ed anco farvi le opportune immorsature orizzontali a guisa di altrettanti gradini, i quali abbiano le altezze eguali a quelle dei cordoli corrispondenti dell' argine nuovo; anzi nel formare questo capo dell' argine nuovo bisognerà procurare di far uso di terra non molto differente da quella colla quale sarà formata l' immorsatura del vecchio.

Similmente, se a traverso dell'argine nuovo si dovranno fare delle botti sotterranee o delle chiaviche, non si dovrà risparmiare nella loro solidità, e si costruiranno ad esse, almeno verso l' interno all' argine, due lunghe e profonde sponde laterali, solide ed appoggiate anzi incassate nella scarpa dell' argine medesimo, affinchè l' acqua non possa farsi strada fra la terra ed il muro, come sventuratamente avvenne alcune volte: se poi questi edifizj si dovranno eseguire in legno, bisognerà farli in modo che anco nelle maggiori siccità non si possano piegare particolarmente verso l' interno di essi; giacchè nei tempi delle piene, sebbene si chiudano le porte di queste aperture, l' acqua nonostante, senza le dette

precauzioni, può attraversare l' argine pei fori lasciati da siffatte piegature, come accadde alcune volte e sempre con grave pregiudizio dell' argine, anzi con pericolo di rottura di esso, siccome diffatto alcune volte avvenne.

Succede talvolta, che è si angusto lo spazio sul quale bisogna erigere un tronco d' argine, che esso non si potrebbe fare della altezza necessaria per sostenere le acque delle maggiori piene e nel medesimo tempo dare al suo piano la necessaria e desiderata larghezza, ed alle sue scarpe quelle pendenze coll' orizzonte che sono volute dalla natura delle terre e dalla stabilità dell' argine; in questi casi, onde poter fare il tronco in quistione colla altezza ed il piano suddetto, si fanno le sue scarpe, almeno la parte inferiore della interna, di fascinoni, o di buzzoni, oppure d' altre materie più consistenti della terra: come si facciano questi materiali, e come si combinino onde formare le dette scarpe, non è questo il luogo di dichiararlo.

Terminato il corpo dell' argine, si farà il cappello. Qual debba essere la figura e la posizione di esso rispetto all' argine si è già detto nelle definizioni e nozioni esposte al principio di questo trattato, e se ne può vedere un profilo ordinario nelle parti superiori delle figure cinquantaseiesima e sessantunesima, per cui rimane solo a vedersi quali debbono essere le sue dimensioni e la qualità della terra conveniente per formarlo.

La lunghezza del cappello dev' essere pari a quella dell' argine, e la sua altezza o quella di ogni suo profilo non si può precisare; essa però si fa comu-

nemente fra un sedicesimo ed un ventiquattresimo della base dello stesso profilo o larghezza del piano dell' argine. La terra più adattata per formare il cappello in complesso sarà la più tenace e meno penetrabile dall'acqua, per cui passabile riescirà fatto di terra da prato ordinario; però, quando l' argine debba servire per istrada, o che si debba camminare su di esso nei tempi delle grandi piene e di piogge continuate senza interruzione per lungo tempo, sarà bene che il cappello sia fatto almeno di sabbia, e nel primo caso arcuato.

Ultimato il cappello, si faranno battere tanto le sue scarpe quanto quelle dell' argine, dopo avere adattati quei luoghi di queste scarpe nei quali vi erano le strade per salire i trasportatori sull'argine; indi *tirare a spago*, come si dice comunemente, sì i cigli dell' argine che la cresta del cappello stesso: e finalmente faransi lisciare con pale od anco con ispattole di legno tanto le scarpe del cappello quanto quelle dell' argine, pestandole prima con pestoni a basi piane, se ciò si crederà utile.

Eccoci ad una operazione onorevolissima pei periti, alla approvazione cioè o collaudazione dell' argine, che omai infonde nell' animo degli agricoltori delle campagne esterne circostanti una sì grande e dolce speranza di godere nell' avvenire i frutti delle loro future fatiche, che essi danno mano all' aratro ed alla falce colla stessa invidiabile tranquillità d' animo.

Questa operazione sommamente interessante, per chi deve pagare la spesa dell' argine, per gli Appaltatori o Cattimisti, e sopra tutto per quei periti

che hannò avuto parte nella costruzione di esso, è bene che si faccia dal vero direttore del lavoro in concorso di tutte le persoue interessate, dietro un idoneo invito di chi approvò il progetto e la spesa per formarlo; e che si effettui trenta o quaranta giorni dopo l'ultimazione suddetta dell'argine, qualora non vi siano condizioni per le quali d'uopo sia regolarsi diversamente: e siccome essa si deve risolvere in sostanza nel paragonare tutte le parti dell'opera eseguita ai disegni del progetto insieme alle rispettive condizioni, onde verificare se ciascuna di queste parti è stata eseguita come si voleva; così è necessario che l'ingegnere incaricato di questa visita, abbia alla mano tutte le carte sì relative al progetto che alle condizioni suddette, e che conosca quali dovranno essere le parti dell'opera, che egli dovrà particolarmente sindacare; più che egli abbia conoscenza della abilità e della morale delle principali persone che hanno avuto parte nella formazione dell'argine siano esse capi operaj, o appaltatori, od assistenti ed anco che interroghi questi ultimi se nella esecuzione dell'opera sono accaduti accidenti interessanti per questa sua incombenza.

Comunemente nell'atto di eseguire una collaudazione, si dà primieramente un'occhiata generale al lavoro, onde vedere, se esso eseguito corrisponde alla idea cencepita col progetto, e nel medesimo tempo si medita quell'ordine che converrà tenere per eseguir la visita nel miglior modo; indi si prendauo le misure necessarie, per la verificazione suddetta delle parti principali dell'opera, fra le quali

si debbano comprendere almeno le posizioni e dimensioni dei cavi e delle salite e calate, la costruzione delle chiaviche, ed opere consimili, e le dimensioni del corpo dell' argine segnatamente l' altezza e l' inclinazione delle sue scarpe.

La miglior maniera per assicurarsi se l' altezza e le scarpe dell' argine siano come si richiedevano assolutamente, è quello di riferirle ai modelli ancora esistenti, previa però una assicurazione che essi abbiano ancora le posizioni e le dimensioni date ad essi nel principio del lavoro. Così, se in questa visita nascesse il dubbio di qualche frode accaduta, per esempio che si fosse seppellita paglia od altra simil materia nel corpo dell'argine, bisognerà assolutamente levarselo con un di quei mezzi facilmente immaginabili, senza allontanarsi però dal modo di procedere comune ai migliori periti, il quale anzichè irritare l'autore della frode lo avvilisce.

Ultimata la visita, si estende una relazione di essa, come vogliono i regolamenti, la quale molte volte consiste in un processo verbale fatto alla presenza di tutti i concorrenti e relativo allo stato in cui si è trovata l'opera eseguita; e questo si rimette insieme alle proprie osservazioni a chi ordinò la collaudazione, unendovi anco le descrizioni degli accidenti notabili incontrati nella esecuzione di essa; esponendo però tutto con quel candore voluto dal carattere che si veste in queste fortunate occasioni.

Finalmente si ordinerà di levare i modelli dei profili e di porre ai cigli dell' argine le zolle erbose preservate sino dal principio dell' opera, oppure altre appositamente formate; e se queste non costeranno

molto, si faranno pure anco al piede della scarpa interna, colla avvertenza, che sì queste, che le antecedenti siano almeno in parte incassate nel corpo dell' argine ed anco innaffiate, qualora l' argine sia interessantissimo e la stagione non sia favorevole alla vegetazione: come pure, se si crederà opportuno per la conservazione dell'argine, si ordinerà di seminare della gramigna stritolata o della pula di fieno ed anco della semente di erba medica a picciole radiçi ma spesse, sulle scarpe dell'argine e sul cappello, onde finalmente tutta la superficie dell'argine insieme a quella del cappello risulti interamente inerbicata. Anzi se l'argine sarà formato di sabbia si procurerà di fare inteppare tutta la sua superficie; od almeno le superficie delle sue scarpe, segnatamente quella dell'interno, se l'acqua a sostenersi potrà andar soggetta a sbataizze.

Quando l'argine si facesse per uso di strada, o che dovesse anco servire per tal uso sarebbe ottima precauzione quella di porre delle zolle erbose ossiano piote anco lungo i cigli di alcuni cordoli intermedj; giacchè con ciò si difficolterebbe alla terrâ delle scarpe di franare con tanta facilità, come suole accadere per questi argini, quando non si abbiano questi riguardi, stante le scosse continue o replicate prodotte dal moto delle vetture che passano sopra questi medesimi argini. Anzi in questi casi non bisognerà seminare il cappello come si è detto in generale, ma bensì porvi sopra uno strato di sabbia e di tale altezza che la carreggiatura non possa intaccare il cappello stesso od almeno il corpo dell'argine.

PARTE SESTA.

DELLE REGOLE PER CALCOLARE IL COSTO DI UN ARGINE.

Allorchè si deve determinare quanto sia per costare la formazione di un argine dato, si presentano due difficoltà; cioè, in primo luogo, quali fra le operazioni di cui si è parlato nella parte precedente si dovranno effettivamente eseguire per esso, ed in secondo luogo a quanto monterà la spesa parziale per ciascuna di queste medesime operazioni, non che quelle delle manutenzioni; giacchè nella somma di tutte queste spese parziali consiste evidentemente la spesa richiesta.

Ora, siccome conoscendosi la parte antecedente ed avendo presente al pensiero l'argine a costruirsi, si ha quanto basta per superare la prima di queste difficoltà: così basterà, che in questa parte si parli della seconda, cioè dei mezzi onde determinare ciascuna delle spese parziali, inclusivamente a quelle necessarie per le manutenzioni.

Siccome poi non è possibile nello stato attuale della pratica di dare norme generali, onde prescrivere in ogni caso individuato le spese parziali per l'esecuzione di ciascuna delle dette operazioni; per questo io mi contenterò per ora di indicare quali sono in certa guisa gli elementi principali dai quali ciascuna di esse potrà dipendere.

Considerando tutte le operazioni che possono occorrere nella formazione di un argine ordinario, si-

comprenderà facilmente, che tutte le spese necessarie per la formazione di esso debbono trarre la loro origine dalle quattro specie di cose che seguono; cioè, dai danni che verranno cagionati ai particolari circostanti ed al Governo colla formazione dell'argine; dalle preparazioni che si dovranno fare sì alla base dell'argine che ai terreni dai quali converrà prendere la terra per formarlo, ed adattamenti di strade per eseguire i trasporti delle terre; dalla vera formazione dell'argine e dalle spese pei mezzani, per le manutenzioni e per l'ufficio ossia per l'Ingegnere. Io parlerò delle spese provenienti da queste differenti cose separatamente, e coll'ordine qui tenuto nel nominare le cose stesse.

Nel costruire un argine, i danni che si cagionano comunemente ai particolari e che si debbano indennizzare ai medesimi consistono in casupole distrutte, in piante atterrate, in biade distrutte o semplicemente guastate, e nei fondi occupati coll'argine e coi cavi da cui estrarre la terra per formarlo.

La stima di questi danni si farà coi metodi ordinarj; però si dovrà sempre propendere a favore del particolare molestato, stante che il danno che si reca con tali opere ai particolari, segnatamente ai piccioli, è generalmente maggiore di quello, che si trova colla stima fatta secondo le regole ordinarie. Inoltre i materiali godibili delle case demolite, e le piante atterrate si lasciano per l'ordinario agli stessi antichi proprietarj di esse; e si valutano tanto meno i loro danni; bene inteso sempre, se così ad essi aggrada.

Le spese poi, nelle quali si può impegnare il Governo nel costruire un argine che si debbano valutare nella spesa totale. per la formazione di esso, saranno quelle relative ai nuovi tronchi di strada, che esso sarà obbligato a costruire; come pure quelle dei ponti, e di altre opere consimili. Queste spese si dovranno anch' esse determinare, facendo uso delle regole ordinarie.

La spesa che si fa per preparare la base dell' argine e la campagna da cui trarre la terra per formarlo consiste nella somma di quelle spese parziali che si fanno nel distruggere le case anzidette, nell' atterrare le piante, nel levare la cotica erbosa, nello sgombrare sì il terreno base dell' argine che quello da cui si dovrà trarre la terra per formare l' argine, nell' otturare i fossi, borri, lanche, ecc., nel cambiare le terre cuorose, le striscie sabbiose ecc. in terre migliori, e nello smovere la terra base dell' argine, e le scarpe di un argine vecchio dove si deve unire il nuovo, ecc., cioè nella spesa necessaria per eseguire tutte quelle operazioni che sono relative alla preparazione della base e dei cavi dell' argine e delle scarpe degli anzdetti argini vecchi; di cui si è parlato nella parte antecedente insieme a quelle che possono occorrere per adattare le strade o ponti per eseguire il trasporto delle terre.

Per calcolare la spesa proveniente da tutte queste operazioni non vi sono regole generali, però, quando sia individuato l' argine a costruirsi e la stagione della sua costruzione, la loro determinazione non presenta grandi difficoltà, come di leggieri si può comprendere: si può per altro avvertire, ben-

chè sia cosa evidentissima, che questa spesa dipende dal numero delle giornate impiegate nei suddetti lavori e dal prezzo di ogni giornata corrente all' epoca del lavoro medesimo e precisamente nel luogo dove si deve costruire l' argine.

Parlerò ora della spesa proveniente dalla vera formazione dell' argine.

Prima che la terra faccia parte del corpo dell' argine si fanno su di essa tre distinte operazioni, affatto indipendenti l' una dall' altra; cioè essa si scava e si scarica sugli strumenti coi quali si deve trasportarla; si trasporta al luogo destinato che è quello dei cordoli dell' argine, indi si stritola, se tale non è ancora, e si dispone in cordoli, e si pesta, cioè si stritola, spiana, e pesta, operazioni le quali si fanno quasi sempre promiscuamente.

La spesa per gli scavatori e caricatori insieme, cioè per lo scavare ed il caricare della terra sugli strumenti, dipende principalmente dalla durezza, tenacità, dalla profondità dalla quale si deve trarre la medesima, e dal prezzo della giornata di cui si è parlato sopra: la spesa dell' effettivo trasporto, varia, variando il peso della terra a trasportarsi, la distanza che ha l' argine dai luoghi dove è situata la terra stessa, la inclinazinne delle vie a seguirsi nel trasporto, il prezzo della giornata anzidetta; in generale questa spesa cambia col cambiare delle circostanze accennate nell' osservazione quinta della proposizione prima esposta nella parte terza. La spesa per istritolare, spianare e pestare la terra dipende solo dal prezzo e dal numero delle medesime giornate anzidette; e propriamente varia col variare alcune qualità

della terra come sono la quantità, la durezza delle zolle, la tenacità, ecc.

Tutto ciò che si può dire astrattamente per calcolare la spesa di un trasporto non indicato, già si è detto nella parte terza anzi citata; rispetto poi alla spesa degli scavatori-caricatori, ed agli stritolatori-spianatori-pestatori in nulla od almeno in poco può giovare l'analisi astratta, senza il soccorso della sperienza; e siccome anco per queste cose, mancano fatti sufficienti per istabilire delle regole generali neppure empiricamente; così mi limiterò ad esporre solamente ciò che qui segue.

Essendo la spesa necessaria per la formazione di un'opera evidentemente eguale al prezzo della giornata dell'operajo corrente nel tempo e luogo della esecuzione dell'opera medesima, moltiplicato pel numero di esse giornate; trovato che si avrà la spesa per la formazione di un argine, ammesso per la giornata dell'operajo medesimo un prezzo qualunque anco ideale o fittizio, con una semplice proporzione geometrica, si determinerà la spesa vera, qualunque sia per essere la sua effettiva giornata al tempo e luogo della formazione dell'argine a costruirsi: ben inteso però, che la formazione dell'argine per cui si sia fatto il detto calcolo, richiegga le stesse operazioni che sono necesserie per formare effettivamente l'argine che si ha di mira.

La migliore maniera, fra le comunemente usate, per valutare la spesa della vera formazione di un argine, è quella di dare all'operajo un tanto per ogni unità cubica di terra, sì per lo scavo e carico, che pel trasporto di essa.

Onde poter pronunciare qualche cosa di concreto rispetto alla spesa in quistione, fisseremo la giornata fittizia dell'operajo, destinato alle dette due operazioni, a lire una e mezzo italiana; così che, per noi la proporzione a farsi per rinvenire la vera spesa, sarà la seguente. Una lira e mezzo italiana, alla spesa trovata nella detta ipotesi, come il prezzo vero della giornata dell'operajo nel tempo e nel luogo della costruzione dell'argine, alla vera spesa cercata. Così fisseremo il metro cubo per unità solida, come già si fece anco altrove in seguito trattato.

I pratici più consumati, onde corrispondere la mercede dell'operajo, determinano il numero dei metri cubi di terra, misurando i volumi dei cavi e non quello dell'argine; e di ciò ne informano gli operaj, affinchè essi non abbiano veruno interesse, che non si stritoli e pesti bene la terra posta nei cordoli; varj altri però, misurano il volume della terra stessa, già portata in argine, ossia ritengono il volume dell'argine per quello della terra trasportata. Sebbene il primo di questi mètodi meriti la preferenza sull'altro, nulladimeno entrambi danno il medesimo risultamento, purchè si abbia riguardo all'accrescimento che generalmente riceve il volume della stessa massa di terra traslocata dai cavi agli argini nuovi, e si misurino esattamente i volumi, tanto dei cavi, quanto dei tronchi corrispondenti degli argini.

Il sopra citato ingegnere Bolognini trovò, che per la terra forte il suddetto incremento di volume arriva sino al dieci per cento, e per la dolce al tre al quattro pure per cento; di modo che si può ritenere per un accrescimento medio il sei per cento;

o ciò che è lo stesso, che il volume del cavo a quello dell'argine nuovo corrispondente, sia come cento à centosei.

Per trovare poi il volume della terra trasportata, mediante i cavi, comunemente si decompongono questi in prismi ordinarj, e si determinano le dimensioni delle loro basi dai fondi dei cavi stessi e le altezze mediante apposita livellazione, ovvero da certi corpi di terra lasciati qua e là intatti nei cavi medesimi, quando i cavi siano già formati: questi corpi si chiamano *testimonj* o *spie*, ed hanno la figura di coni o piramidi tronche, od anco di liste di terra a foggia d'arginelli attraversanti i cavi stessi. Quando poi si debba desumere il volume della terra trasportata, da quello dell'argine, esso si suppone decomposto in prismi, ordinariamente quadrangolari, e se ne desumono le rispettive dimensioni dai profili e lunghezze dei tronchi dell'argine medesimo.

Quantunque colla regola qui citata, si possa trovare il volume della terra trasportata molto approssimatamente, non ostante, stimo bene di esporre le seguenti, le quali in molte occasioni meritano di essere preferite alle anzidette, sì per la loro semplicità che per l'esattezza, che si può conseguire nei risultamenti.

« Determinare il volume di un tronco d'argine, » che ha il piano orizzontale, la base in un piano » comunque inclinato all'orizzonte, ed i profili estre- » mi entrambi verticali e perpendicolari alla linea » di esso; più la linea, i lati della soglia, quelli della » base, non che di qualunque suo profilo, rettilinei? »

Si ponga il tronco d'argine capovolto in modo, che la sua soglia risulti di nuovo orizzontale, ma

sotto il tronco stesso; ed in questa posizione sia essa indicata dal trapezio ordinario $ADda$ (fig. 60), i suoi profili estremi ed uno qualunque dai quadrilateri $ADEF$, $adef$, $A'D'E'F'$ adattatisi al piano nel quale si suppone attualmente la soglia $AadD$, col rotare intorno ai rispettivi lati AD, ad, $A'D'$.

Si tirino le rette FB, EC, $F'B'$, $E'C'$, fb, ce perpendicolari rispettivamente ai prolungamenti delle AD, $A'D'$, ad; e si uniscano le $BB'b$, $CC'c$; e si nominino le CD, BC, AB, cd, bc, ab, CE, EF, ce, fb ordinatamente B, B', B'', b, b', b'', A, A', a, a'; più si chiami L la lunghezza del tronco intero, ed x quella della sua porzione compresa fra i profili innalzati sulle rette $A'D'$, a, d.

Per ciò che si sa dal calcolo integrale, il volume cercato sarà eguale all' integrale del differenziale $A'D'E'F'.dx$ esteso da $x=0$ sino ad $x=L$.

Ma l' area di $A'D'E'F'$ eguaglia

$$\tfrac{1}{2}\Big(B'C'(B'F'+C'E')-B'F'\cdot A'B'-C'E'\cdot C'D'\Big);$$

e per alcune condizioni espresse nel dato della proposizione si ha

$$C'D'=b+\frac{B-b}{L}x\,,\quad C'B'=b'+\frac{B'-b'}{L}x\,,$$

$$A'B'=b''+\frac{B''-b''}{L}x\,,\quad C'E'=a+\frac{A-a}{L}x\,,$$

$$B'F'=a'+\frac{A'-a'}{L}x\,;$$

e però l'area del quadrilatero $A'D'E'F'$, cioè la sua espressione anzi esposta sarà eguale ad

$$\tfrac{1}{2}\left(b'+\frac{B'-b'}{L}x\right)\left(a+a'+\frac{A+A'-a-a'}{L}x\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(b''+\frac{B''-b''}{L}x\right)\left(a'+\frac{A'-a'}{L}x\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(b+\frac{B-b}{L}x\right)\left(a+\frac{A-a}{L}x\right).$$

Eseguite le moltiplicazioni qui indicate, e poscia la integrazione suddetta, ed esteso l'integrale come si è detto da $x=0$ sino ad $x=L$, risulta il volume cercato eguale ad

$$\frac{L}{12}\left\{\begin{array}{l} A\,(2B'-2B+b'-b)+a\,(2b'-2b+B'-B) \\ -A'\,(2B''-2B'+b''-b')-a'\,(2b''-2b'+B''-B') \end{array}\right\}$$

formula molto regolare, e di cui il secondo termine fra le parentisi più grandi è ciò che si ha, cambiando nel primo le lettere majuscole nelle minuscole cognomini, e viceversa le minuscole nelle majuscole analoghe; e i due altri derivano dai due primi, scrivendo in essi un apice di più a ciascuna lettera, e cambiandovi i segni.

Corollario I. Essendo $B'-B=BD$, $B'-B''=AC$,
$b'-b=bd$, e $b'-b''=ac$,
la formula trovata per esprimere il volume del tronco d'argine in quistione, si riduce a quest'altra molto più semplice

$$\frac{L}{12}\left\{\begin{array}{l} (2BD+bd)CE+(2bd+BD)ce \\ (2AC+ac)BF+(2ac+AC)bf \end{array}\right\}$$

Corollario II. Se i due profili estremi del tronco, e per ciò anco tutti gli intermedj, saranno trapezi ordinarj; cioè se essi avranno orizzontali anco i lati EF, ef e per conseguenza fra loro paralleli, si

avrà $CE = BF$, ed anco $ce = bf$; e per tanto in questo caso, che si incontra spessissime volte nella pratica, la formula esprimente il volume del tronco si ridurrà alla

$$\frac{L}{12}\Big((2BD+bd+2AC+ac)CE+(2bd+BD+2ac+AC)ce\Big),$$

e conseguentemente alla seguente

$$\tfrac{1}{12}L\Big((2CE+ce)(BD+AC)+(2ce+CE)(bd+ac)\Big).$$

Quindi moltiplicando la somma di due lati orizzontali di uno dei profili estremi, pel doppio della sua altezza insieme all'altezza dell'altro profilo estremo, e facendo altrettanto anco per quest'altro profilo; indi moltiplicando la somma di questi due prodotti per la dodicesima parte della lunghezza del tronco, si avrà il volume di esso: regola, che alla esattezza riunisce, come si vede, una grande semplicità.

Corollario III. Se i due profili estremi fossero poi fra loro eguali perfettamente, la stessa formula darebbe il volume cercato, per questo caso, eguale ad $\frac{1}{2}L\,(FE + AD)\,BF$; cioè eguale al prodotto della lunghezza del tronco, nell'area di uno dei medesimi profili estremi: come appunto d'altronde si sa.

Osservazione I. Egli è facile a concepirsi, che, le superficie delle scarpe del tronco d'argine considerato nella proposizione qui sopra esposta, sono in generale porzioni delle superficie di due paraboloidi iperbolici, facili a conoscersi mediante le loro equazioni.

Osservazione II. La regola esposta per trovare il volume del tronco d'argine di cui si parla, si potrà usare anco per trovare il volume o la capacità di

un tronco analogo di un canale, di un fosso, in generale di un cavo, onde conoscere il volume della terra scavata da esso, o l'acqua che può contenere.

Osservazione.

Approfitto di questa occasione per indicare una regola onde trovare la capacità delle botti Ellittico-Ellittiche, la quale alla esattezza unisce anch'essa una grande semplicità.

Siano A, B, C i tre semiassi di un ellissoide, ed x, y, z le tre coordinate di un punto qualunque della sua superficie, parallele rispettivamente agli assi stessi A, B, C; ed aventi l'origine nel centro del medesimo ellissoide; e si avrà per equazione della superficie di esso

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2+\left(\frac{y}{B}\right)^2+\left(\frac{z}{C}\right)^2=1.$$

Così, siano a, b i due semiassi paralleli agli A, B di una sezione fatta parallelamente al piano degli stessi A, B, ed avrassi

$$\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{z}{C}\right)^2=1,\ \text{ed anco}\ \left(\frac{b}{B}\right)^2+\left(\frac{z}{C}\right)^2=1;$$

$$\text{ossia}\ a=\frac{A}{C}\sqrt{C^2-z^2},\ \text{e}\ b=\frac{B}{C}\sqrt{C^2-z^2};$$

Il volume di quella porzione di questo ellissoide, la quale è intercetta fra le sezioni, che hanno per semiassi l'una A, B, e l'altra a, b sarà eguale all'integrale di $\pi ab.dz$ ossia di $\pi\frac{AB}{C^2}(C^2-z^2)\,dz$ esteso da $z=0$ sino alla stessa z; ove π esprime la semiperiferia avente per raggio l'unità; e però esso volume risulterà eguale a

$$\pi AB\left(1-\frac{z^2}{3C^2}\right).z\;..$$

Ma siccome dalle ultime due equazioni qui esposte si ha $ab=\frac{AB}{C^2}(C^2-z^2)$, ossia $\frac{z^2}{C^2}=1-\frac{ab}{AB}$; così, ponendo nell'espressione del volume in luogo di $\frac{z^2}{C^2}$ questo suo valore, si avrà il volume stesso dato per

$$\frac{\pi}{3}(2AB+ab)z:$$

dove la z esprime evideutemente, per siffatta porzione d'ellessoide, la distanza fra le sezioni, che hanno per semiassi l'una A e B, e l'altra a e b.

Ora, si immagini un'altra porzione ellissoidica analoga a quella considerata qui sopra, e che abbia comune con quest'ultima i due semiassi A, B e l'altro di qualunque lunghezza, anzi in generale diverso dal C sopra usato, e non la penetri, cioè che esista rispetto alla sezione che ha per semiassi AB; non già dalla banda stessa che la precedente, ma bensì dalla banda opposta. Il volume di questa nuova porzione d'ellissoide evidentemente sarà eguale ad $\frac{1}{3}\pi(2AB+a'b')z'$:
ritenuto che a', b', z' esprimano per essa ciò che a, b, z rappresentano per la suddetta.

Ma evidentemente l'unione delle due porzioni ellissoidiche qui considerate costituiscono una vera botte Ellittico-Ellittica; adunque la capacità di una siffatta botte sarà espressa dalla formula

$$\frac{\pi}{3}(2AB+ab)z+\frac{\pi}{3}(2AB+a'b')z'$$

ovvero dalla $\frac{\pi}{3}\left(2AB(z+z')+abz+a'b'z'\right)$;

ed anco dalla seguente

$$\frac{\pi}{12}\left(2\cdot 2A\cdot 2B(z+z')+2a\cdot 2b\cdot z+2a'\cdot 2b'\cdot z'\right)$$

la cui scrittura è più complicata di quella della antecedente, ma essa è più comoda per la pratica.

Ecco per tanto una regola che si potrà usare per trovare la capacità della botte Ellittico-Ellittica qualunque essa sia. «Si moltiplichi il prodotto dei due assi d'un fondo della botte per la sua distanza dalla massima sezione trasversale: facciasi una simile operazione per la tèsta od altro fondo della botte stessa: si moltiplichi il prodotto dei due assi della massima sezione trasversale per la lunghezza della intera botte; ed al doppio di quest' ultimo resultato uniscansi i due precedenti; e finalmente la somma così risultante si moltiplichi pel numero $\frac{\pi}{12}=0,2618$; e si otterrà la capacità richiesta.» Questa regola evidentemente è la traduzione in linguaggio comune dell'ultima formula trovata.

Corollario. Se nella botte di cui si parla fosse $z=z'$, cioè la testa ed il fondo fossero equidistanti dalla sua massima sezione trasversale, l'ultima formula esposta per trovare la capacità di essa, si ridurrebbe, in questo caso alla seguente

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{z+z'}{6}\left(4\cdot 2A\cdot 2B+2a\cdot 2b+2a'\cdot 2b'\right),$$

che esprime la regola data la prima volta dal signor Oriani.

Osservazione. Non voglio tralasciare di avvertire, che le formule esposte per la cubatura di un tronco d'argine e quella per la cubatura di una botte El-

littico-Ellittica, si possono dimostrare anco elementarmente; e che la seconda di esse si può cavare da quella pubblicata la prima volta dl nostro benemerito Cossali col' tomo della Società italiana delle scienze, stampato l'anno mille e ottocento sedici, mediante alcune proprietà delle sezioni della botte stessa, che hanno luogo in forza della sua costituzione.

Un'altra proposizione importante per chi deve determinare il volume delle terre, siano esse in argine o nei cavi, è la seguente, la quale non è nuova, come sanno coloro che non conoscono le applicazioni del teorema Guldiniano.

« Il volume di un corpo avente due faccie piane » opposte, e la rimanente superficie composta di più » faccie piane, o cilindriche anco qualsivogliono, od » anco di alcune piane ed altre cilindriche, ma tutte » perpendicolari ad una delle dette due faccie piane, è eguale all'area di quest'ultima faccia, moltiplicata per la distanza fra essa ed il centro di » gravità dell'altra faccia analoga. »

Siano x, y, z le tre coordinate rettangole di un punto qualunque del corpo, di cui i due assi delle x, y siano nel piano di quella faccia alla quale sono perpendicolari quelle faccie che possono essere piane oppure cilindriche, ed il volume del corpo verrà espresso dall'integrale $\iint z\,dx\,dy$ esteso fra i limiti indicati dagli estremi del corpo stesso.

Così, sia ds^2 quell'elemento dell'altra delle due suddette faccie, che corrisponde alle coordinate xy; ed α esprima l'inclinazione dei piani di queste due medesime faccie; evidentemente si potrà fare $ds^2 \cos.\alpha = dx\,dy$; e però il volume del corpo, di cui parlasi, sarà anco

eguale a $\cos. \alpha \times \int\int z\,ds^2$. Ma come è noto $\int\int z\,ds^2$ eguaglia $A\int\int ds^2$, purchè A esprima la distanza fra il piano delle x, y ed il centro di gravità della faccia opposta a quella situata nel piano stesso: adunque il volume del corpo presente sarà anco eguale ad $A\int\int ds^2 \cos. \alpha = A\int\int dx\,dy$; cioè l'area di quella faccia, a cui sono perpendicolari le dette faccie piane o cilindriche, moltiplicata per la distanza fra essa faccia ed il centro di gravità della opposta e sua analoga. Appunto come si è asserito.

Corollario. Se il corpo considerato qui sopra fosse un prisma triangolare tronco, sarebbe il suo volume eguale al prodotto di una sua faccia triangolare, moltiplicata per la terza parte della somma delle tre perpendicolari calate su questa faccia medesima dai vertici degli angoli dell'altra analoga; giacchè il centro di gravità dell'areo di un triangolo coincide con quello dei vertici degli angoli di esso.

Non parlo della regola per trovare il volume del cappello, perchè qualunque esso sia, si può sempre dividere in più tronchi, ciascuno dei quali abbia i suoi profili presso a poco eguali fra loro; ed il volume di ciascuno di essi eguaglia, pel teorema Guldiniano sopra citato, quello di un prisma avente la base equivalente al profilo del tronco stesso e per altezza la lunghezza della sua traccia o della linea del corrispondente tronco d'argine; e passo in vece a compire quanto ho divisato di esporre nella parte presente.

Per lo scavo e carico su carriuole o barelle di una terra ordinaria, che si è dovuto cavare dalla profondità non maggiore di un metro, la spesa è

risultata di centesimi tredici circa per ogni metro cubo; e sarebbe risultata poco più, se si fosse caricata sopra carrette, o barozze, o carri. La terra qui considerata, è quella stessa il cui trasporto alla distanza di trenta metri in istrade orizzontali a fondi ordinarj è importata centesimi dodici, come già si disse in altra occasione.

Quando poi la terra sia forte o la profondità da cui si debba trarre maggiore di un metro, la spesa anzidetta per lo scavo e carico suole aumentarsi di due, o di tre, ed anco di quattro centesimi per ogni metro cubo.

Nell'occasione dello sperimento dal quale si sono ottenuti i risultamenti qui esposti, la spesa per chi stritolava, spianava e pestava la terra dei cordoli, cioè la spesa totale pegli stritolatori-spianatori-pestatori si trovò di sei centesimi per ogni metro cubo; e però fra un quarto ed un quinto della somma delle due spese già considerate, vale a dire delle spese per gli scavatori-caricatori, e pei trasportatori.

Delle spese pei mezzani, per la manutenzione e per l'ufficio od Ingegnere.

Un argine, al pari di qualunque altr'opera, si può costruire tutto o per economia o per appalto, ovvero in parte col primo metodo e la rimanente col secondo: allorchè tutte le parti di un argine, od anco solamente alcune di esse, si vogliono eseguire per economia, si incaricano alcune persone a cercare gli operaj, ed a contrattare con essi per l'effettiva esecuzione delle parti stesse, come pure a

procurare i materiali e gli utensili a ciò necessarj, e ad assistere il lavoro sino alla sua perfezione; pel contrario, quando alcune parti di un argine, od anco tutte, si fanno eseguire per via d'appalto, gli appaltatori pensano a tutto ciò che occorre per l'esecuzione di esse. Nel primo di questi casi, alle persone suddette, le quali sono i veri mezzani dell'esecuzione dell'opera, si conferisce un tanto al giorno, il quale dev'essere maggiore dell'ordinaria giornata d'ogni operajo, stante le qualità che si richieggono per esse; e per tanto facilmente si troverà a quanto potrà montare presumibilmente la spesa dell'opera proveniente da questo articolo; nel secondo caso, cioè quando si ricorre agli appaltatori a questi bisogna conferire oltre di ciò che dovranno spendere essi medesimi quanto guadagnerebbero le anzidette persone, giacchè ne fanno le veci, più un tanto per cento sui capitali che essi dovranno impiegare prima delle sovvenzioni o rate che loro si faranno. Generalmente la spesa dell'opera che trae origine da ciò che si deve dare agli appaltatori, oltre al vero costo di essa, tutto compreso, ascende dal dieci al quindici per cento del valore dell'opera che si fa eseguire da essi, cioè dell'effettivo capitale impiegato da essi medesimi.

Non parlo delle qualità necessarie pei mezzani ed assistenti, nè di quelle degli appaltatori, nè dei riguardi che si debbono avere nell'estendere i così detti capitoli per gli appalti, nè dei modi di tenere le aste stesse; perchè esse si presentano immediatamente a chiunque vi pensi, o sono puramente amministrative, nel qual caso si trovano nei regolamenti noti altrimenti agl'Ingegneri.

Per conoscere quella somma, che a titolo di manutenzione si dovrà comprendere nel costo dell'argine a costruirsi, bisognerà in primo luogo determinare la durata presumibile dell'argine medesimo, e le spese annuali necessarie pel buon governo di esso ed anco delle opere dipendenti, cioè per le bordature, per le scarpe artificiali, per le pennellature, per le chiaviche, ecc., non che quelle pei custodi. Fatto ciò, d'uopo sarà scoprire quel capitale, a cui unito il suo interesse di un anno, ed alla somma levata la spesa di manutenzione occorrente nel primo anno della durata dell'argine; ed a questa differenza aggiuntovi il suo interesse pure di un anno, e tolta da questa nuova somma la spesa per manutenzione occorrente pel secondo anno; e così continuata siffatta operazione, sino all' ultimo anno della durata dell' argine, bigonerà dico scoprire il detto capitale in modo, che riesca l'ultima di queste somme eguale precisamente alla spesa della manutenzione necessaria per l' ultimo anno della medesima durata dell' argine; giacchè il capitale che avrà questa proprietà sarà evidentemente la somma qui richiesta, e che si dovrà unire alle altre spese a titolo di manutenzione.

Esprima n il numera degli anni della durata presumibile dell'argine o meglio il numero degli anni nei quali abbisognerà la manutenzione; ed $s', s'', s''', \ldots s^{(n)}$ esprimano le spese annuali pel buon governo dell'argine e delle opere dipendenti; ossiano le totali annuali manutenzioni occorrenti pel buon governo dell' argine. Così la x indichi il capitale richiesto,

ed r quel numero pel quale moltiplicando un capitale si ottiene un prodotto eguale alla somma di esso capitale col suo interesse di un anno.

È facile a dimostrarsi coll' analisi ordinaria e molto più mediante il calcolo delle differenze finite, che il capitale cercato dovrà soddisfare l'equazione seguente

$$r^n x - s' r^{n-1} - s'' r^{n-2} - s''' r^{n-3} - \ldots - s^{(n)} = 0,$$

la quale somministra

$$x = \frac{1}{r}\left(s' r^{n-1} + s'' r^{n-2} + s''' r^{n-3} + \ldots + s^{(n)}\right),$$

vale a dire, il capitale richiesto superiormente dovrà essere eguale ad

$$\frac{1}{r^n}\left(s' r^{n-1} + s'' r^{n-2} + s''' r^{n-3} + \ldots + s^n\right)$$

ovvero ad $\frac{s'}{r} + \frac{s''}{r^2} + \frac{s'''}{r^3} + \ldots + \frac{s^{(n)}}{r^n}$.

Corollario. Se le spese delle manutenzioni annue fossero fra loro eguali, si avrebbe il capitale o la spesa in quistione espressa dalla formula

$$\frac{s'}{r^n}\left(r^{n-1} + r^{n-2} + r^{n-3} + \ldots + r + 1\right),$$

la quale si riduce alla seguente $\frac{s'}{r^n}\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$ assai comoda per la pratica.

In quest' ultimo caso, se fosse anco l'n infinito od almeno sì grande da potersi trascurare $\frac{1}{r^n}$ a fronte della unità, la formula qui trovata o la sua equi-

valente $\frac{s'}{r-1}\left(1-\frac{1}{r^n}\right)$, si ridurrebbe alla semplicissima $\frac{s'}{r-1}$, la quale d'altronde è per sè evidente.

Ho detto sopra che per iscoprire la somma che a titolo di manutenzione si dovrà comprendere nel costo di un argine, bisognerà primieramente determinare la durata presumibile dell'argine medesimo, ed anco le rispettive annuali manutenzioni: queste due ricerche rarissime volte si potranno soddisfare esattamente; però individuato l'argine a costruirsi, e conosciuta la parte seguente ed ultima di questo trattato, si potranno spingere le approssimazioni a tal punto, che i risultamenti ottenuti con esse non siano molto lontani da quelli che avranno effettivamente luogo.

Le spese d'ufficio o per l'Ingegnere consistono comunemente in quelle, che si fanno per le visite, pei disegni e carte, per gli effettivi pagamenti agli assistenti, pei costruttori delle paline, picchetti, antenne e per gli zoccoli di muro onde fissare queste ultime, pei modelli dei profili dell'argine o delle sole scarpe, e nel valore dei materiali impiegati per questi ultimi lavori. La determinazione di tutte queste spese non presenterà nessuna difficoltà all'Ingegnere incaricato del progetto dell'argine: esse unite insieme montano generalmente parlando, ad otto centesime parti della somma delle spese già considerate sopra.

Unendo finalmente le spese contemplate sino ad ora, nessuna eccettuata, si avrà la vera spesa necessaria per formare compiutamente l'argine, cioè il costo cercato di esso.

Terminerò questa parte col dichiarare, che, tutte le spese occorrenti per un argine, è ragionevole che vengano sostenute da chi sarà per godere di esso ed anco in proporzione dei rispettivi vantaggi che potrebbero provenire dal medesimo, esclusi però quelli che avessero luogo puramente per accidentalità; e che allorquando l' argine e le opere dipendenti si fanno per via d' appalto è bene che vi siano assistenti posti dal proprietario dell' argine, con una giornata stabilita dallo stesso e da pagarsi da lui medesimo od anco dagli stessi appaltatori a norma delle circostanze.

PARTE SETTIMA.

OPERAZIONI E PRESCRIZIONI NECESSARIE PEL BUON GOVERNO DEGLI ARGINI.

Fra le cose immaginate onde conseguire un buon governo delle arginature, ottima è la istituzione di un corpo composto dei migliori Ingegneri dello Stato, coll' obbligo ad alcuni di essi insieme ai necessarj subalterni di abitar nei paesi dove sono gli argini più importanti, e di riferire a tempo ai capi del corpo gli eventi interessanti relativamente alle arginature stesse, e anco colla autorità di fare eseguire le opere pressanti rispetto alle medesime; e questo corpo riescirebbe oltremodò più utile allo stato ed alla istruzione della gioventù, se avesse anco l' obbligo ed i mezzi di pubblicare di mano in mano le relazioni genuine delle opere più grandi eseguite da esso.

Qui pure io non entro a discutere, come il corpo suddetto dovrebb' essere organizzato e quali dovrebbero essere le qualità e gli attributi di ogni suo individuo, affinchè massimo fosse il vantaggio apportato da esso al pubblico; giacchè tutto ciò si è già discusso magistralmente ed anco pubblicato da altri: e solo mi limiterò a far voto pel bene della gioventù che si realizzi l' ultima delle anzidette attribuzioni del corpo stesso.

Tutte le operazioni e prescrizioni necessarie per il buon governo degli argini servono, alcune per accrescere od almeno conservare le buone qualità che ha l' argine appena costruito; altre per impedire l'accrescimento di quei difetti, i quali o non si sono preveduti nel progettarlo ed eseguirlo, o non si sono potuti evitare; e talune di esse servono onde impedire le triste conseguenze che potrebbero emergere da questi medesimi difetti: io incomincierò ad indicare le operazioni e le prescrizioni che si debbono fare per accrescere od almeno conservare le buone qualità che ha un argine appena costruito; e poscia parlerò delle altre.

Si semineranno le superficie delle scarpe dell' argine nuovo, e quelle del suo cappello o del piano, di gramigna stritolata, o di lope di fieno, o di semente di erba medica od anco di altr' erba avente simili proprietà, atta cioè colle sue radici a tenere unite fra loro le molecole di terra, onde impedire, che esse franino facilmente, eccettuati però quelli che debbono servire per istrade, come si è già detto in altra occasione.

Si terrà il corpo dell' argine netto da sterpi, ed in generale da erbe di grosso stelo e spesse; perchè nei primi si nascondono comunemente i sorci, le talpe, ed anco altri animali, come le volpi, ecc., i quali animali spesse volte danneggiano gli argini; e le altre perchè finiscono in generale colle loro grosse radici a diminuire sensibilmente la forza dell'argine.

Non si permetterà di coltivare il corpo dell'argine nè le adjacenti campagne, se non che alla distanza di qualche metro dalla base dell' argine stesso; poichè col coltivare l'argine, si diminuirebbe la reciproca stabilità delle sue parti, e se ne altererebbero le sue dimensioni necessarie per sostenere le acque delle grandi piene: e col coltivare quelle delle dette adjacenti campagne, s'indebolirebbero i fondamenti delle scarpe, con pregiudizio certo dell' argine stesso: per tanto ottimo costume egli è quello di alcuni agronomi di seminare di erba medica o altr' erba consimile la superficie del corpo dell'argine, non che le dette campagne appena appena terminata la formazione dell' argine; giacchè in tal guisa essi arrivano a godere in fieno i frutti di questi terreni per molti anni successivi, senza recare danno all'argine stesso.

Bisogna però proibire tanto a questi quanto a qualunque altro individuo di mandar le bestie a pascolare sui piani e sulle scarpe degli argini, perchè esse generalmente deformano l'argine medesimo, ciò che non suole accadere senza danno di esso.

Così, non si dovrà permettere di ficcare pali e molto meno colonne nel còrpo dell'argine; giacchè

nel ficcarli si cagionano generalmente delle crepature al corpo dell' argine stesso, e cavandoli o lasciandoli marcire vi lasciano dei fori nel corpo dell' argine, i quali grandemente lo indeboliscono; anzi, per le stesse ragioni, sarà bene l'astenersi anco dal piantare colonne vicine molto alla stessa sua base. Similmente, si procurerà, che non si pongano piante di qualunque sorta nel corpo dell' argine, come pure che non allignino piante di grosso fusto in vicinanza di esso; e questo non solo pei fori che lascierebbero le loro parti sotterra, come le radici, marcendo, ma anco perchè le medesime potrebbero essere facilmente rovesciate dai venti nei tempi delle piene, stante lo inzuppamento delle terre; rovesciamenti che non succederebbero, senza pericolo di cagionare qualche rottura all' argine.

Sebbene sia un ottimo divisamento quello di proibire di coltivar continuamente la superficie del corpo dell' argine e delle suddette campagne adiacenti, nulladimeno, alcuni periti le permettono, obbligando per altro i coltivatori a portare sulle superficie stesse, particolarmente su quella di tutto l'argine, un tale strato di altra terra, che la coltivazione cada interamente in questo, senza toccare il corpo dell'argine: queste permissioni però assolutamente non si dovranno dare, quando l'argine sarà molto importante, e negli altri casi poi si daranno solamente a quelle persone che saranno esse medesime interessantissime per la sussistenza ed integrità dell' argine, sempre che ciò si possa fare, senza commettere parzialità alcuna.

I tronchi degli argini rimasti in golena per distruzione di qualche argine ritirato, si debbono o

spianare od almeno tagliare in più luoghi; affinchè in tempo di piene non ingolfino le acque, o non dirigano delle correnti contro l'argine nuovo. Similmente, si deve impedire di ammucchiare in golena vicino all'argine terre, rottami, legne molto pesanti, e cose simili: come pure di fare grandi e sregolate piantagioni, e tutto affinchè rimanga in golena libero il corso delle acque in tempo di piene. E se all'argine manca la golena, ovvero esso sia in corrosione o vicino ad esserlo, non si permetterà neppure di fermare al suo fianco, nè barche grandi, nè molini od altri gran corpi natanti.

Così pure, si proibirà di fare in golena arginelli, o piccioli argini circondarj, senza le necessarie prescrizioni, come pur troppo si fanno alcune volte dagli imperiti, onde difendere dalle picciole inondazioni alcune campagne o dei caseggiati rimasti nella golena stessa; perchè essendo questi argini facilmente tracimati od anco rotti possono arrecare danno all'argine col produrre qualche insaccamento d'acque, o col sottoporlo all'urto di qualche improvvisa ed anco perenne corrente; oltre quel danno che producono al pari di quelli fatti anco con tutte le prescrizioni volute in simili circostanze, cioè di impedire alle acque delle picciole ed ordinarie piene di appoggiarsi al piede dell'argine principale, danno che si rende visibile generalmente a chiunque, quando gli argini principali di fronte ai detti secondarj sostengono le acque di qualche gran piena, il che fu alle volte la causa principale di rotture avvenute in questi argini.

Le principali fra le dette prescrizioni, alle quali si debbono sottoporre coloro che vogliono costruire argini nella golena di un argine principale, sono che nel costruirli non alterino assolutamente le parti del principale, che essi abbiano un'altezza sempre minore di quella dei principali medesimi e sino di un metro circa quando questi siano importantissimi, e che sia lecito al proprietario dell'argine principale di fargli tagliare dove credono i periti in tempo di piena; qualora essi siano minacciati d'una tracimazione od anco semplicemente di una rottura.

Le salite, le calate e le traverse assolutamente debbono essere stabilite dagl'Ingegneri; e vi dev'essere rigorosa proibizione di variarle; però è sommamente importante che esse siano comode, come le desiderano i contadini, che ne debbono far uso; altrimenti essi se le adatteranno con pregiudizio dell'argine. In quanto poi alla maniera di determinare la base ed anco le scarpe e di calcolare il rispettivo volume di queste strade, già si è veduto nelle parte precedente.

Nei cavi fatti in golena coll'estrarre la terra, che si è usata per formare l'argine, sarà bene piantare dei piccioli salici od altre consimili piante, cioè ramose e fogliose, molto elastiche, e sì alte, che le loro cime, quando abbiano la maggiore altezza, non sortano dalle buche più di mezzo metro: queste piante oltre togliere i pericoli, che potrebbero avere origine dalla caduta dell'acqua nelle buche stesse, le quali cadute sono spesse volte cagioni di vortici pericolosi per l'argine, rallentano anco le correnti che potrebbero investire e corrodere coll'andar del tempo la scarpa interna dell'argine medesimo.

Se l'acqua a tenersi a segno dall'argine nostro sarà corrente, ottimo effetto farà una siepe di piante pieghevolissime nella campagna interna e disposta al lungo e vicina alla base dell'argine: giacchè essa infievolirà la forza di ogni corrente. Anzi quando l'acqua corrente sia continuamente molto vicina alla base dell'argine, od anco già al punto d'intaccare colla corrosione la base stessa, una serie di siepi regolari delle dette piante, le quali incomincino nella stessa scarpa dell'argine dove presumibilmente arriverà l'acqua nelle piene ordinarie e finiscano alla sponda ordinaria di essa corrente, od anco sino al pelo dell'acqua nello stato delle magre comuni, farà un ottimo effetto, quando si abbia la precauzione di convertire la sponda corrosa in un piano inclinato verso l'acqua stessa.

Converrà visitare più volte l'argine nuovo; e se mai nello stabilirsi, in qualche luogo si abbassasse troppo, bisognerà ivi rialzarlo immediatamente: e se soffrisse qualche spaccatura, converrà smovere tutto quel tronco nel quale sarà essa accaduta, e rifarlo con una base maggiore della prima, e con tutti quei riguardi necessarj, perchè le terre nuove si possano maritare bene colle vecchie. Nei tempi poi delle prime piene, che dovransi sostenere da un argine nuovo, e segnatamente nel tempo della decrescenza della prima, egli è assolutamente indispensabile, che vi siano persone a visitare continuamente tutte le parti dell'argine onde rimediare subito agli inconvenienti che potrebbero emergere dalle mosse di terra che sogliono accadere in queste occasioni.

Gli argini vecchi poi è bene visitarli alla fine dell'autunno e nel principio della primavera: alla fine dell'autunno, perchè se abbisognassero grandi riparazioni, si potrebbero eseguire nella prossima stagione invernale, tempo in cui non accadono generalmente piene rilevanti; ed anco nella primavera, avanti il tempo solito delle inondazioni ordinarie, per togliere i difetti che potrebbero sorgere nell'inverno stesso per qualunque siasi motivo: in entrambi questi casi si badi bene, che le terre non siano gelate, perchè difficilissimamente si unirebbero come si desidera in questi lavori.

Generalmente poi sarà ottimo divisamento quello di visitare gli argini e le altre opere che vi hanno relazione, dopo qualunque piena, onde riconoscere ed informare i superiori, se occorre, di tutto ciò che di rilevante fosse avvenuto per esse nel tempo della piena medesima.

È sommamente utile, anzi direi quasi necessario, che nelle sponde dei fiumi e dei catini, dai quali sortono le acque a sostenersi dagli argini, o meglio presso le scarpe interne degli argini stessi, vi siano segnali fissati al terreno od anco idrometri, da' quali si possa arguire con facilità lo stato delle acque rispetto alle arginature, e che sopra di essi vi siano segnati particolarmente quei punti, che indicano le massime altezze, che possono avere le acque delle piene, senza porre a veruu pericolo presumibile le arginature medesime; più che sianvi persone incaricate di riferire giornalmente ai capi del corpo di cui si è parlato sopra, e particolarmente alle autorità locali, le altezze che ha l'acqua, quando esse siano maggiori

delle anzidette, ovvero siano pericolose per le arginature; affinchè si possano all' occorrenza emanare quegli ordini, che pur troppo alcune volte sono necessarj, per impedire le rotture, ed anco per salvare la vita agli abitanti dei circostanti paesi, quando esse rotture non si possano assolutamente impedire.

Quantunque il calo delle terre componenti un argine accada in gran parte nei primi mesi della sua durata, non ostante esso continua, sebbene più insensibilmente, finchè dura l'argine medesimo, e ciò pel naturale costipamento delle terre ed anco per altre circostanze; per tanto, nelle visite suddette, mediante i segnali posti presso la base dell' argine stesso, bisognerà scoprire gli abbassamenti avvenuti nei diversi tronchi, e quando si trovassero sensibili, e le altre circostanze fossero tuttora le stesse, converrà rialzarli, il che si potrà fare con opportuni insabbiamenti onde riescano praticabili in tutti i tempi. Questa operazione è necessaria soprattutto, quando gli argini servano anco ad uso di strade: anzi in questi casi, siccome i loro piani comunemente si allargono, così converrà riprestinare anco le altre loro dimensioni; e porvi sopra della ghiaja o della sabbia almeno come si praticherà per le strade di pari frequenza e circonvicine all' argine stesso.

Passo ora a parlare delle operazioni e prescrizioni necessarie onde impedire l' accrescimento di quei difetti di un argine, i quali o non si sono preveduti nel costruirlo, o non si sono potuti scansare, o sono sopraggiunti dopo la sua costruzione, e di quelle necessarie per impedire le triste conseguenze che deriverebbero da questi difetti.

Onde procacciare all'esposizione di questa importante materia una sufficiente chiarezza, dopo un breve cenno relativo agli argini *cuorosi* ed alle *sgrottature* e *lissoni ordinarj*, parlerò separatamente della *debolezza*, della *tracimazione*, del *trapelamento*, dello *inzuppamento della parte esterna* del corpo dell'argine, del *froldo*, delle *sorgive* nella campagna esterna, ed infine dei *lissoni della scarpa interna*, che sono i difetti principali a cui possono andar soggetti gli argini formati di terra.

Se l'argine sarà leggiero, spugnoso o cuoroso, si procurerà di farlo servire per istrada; così venendo esso continuamente calpestato dagli uomini, dalle bestie e dai carri, la terra si comprimerà, e l'argine conseguentemente acquisterà una maggiore stabilità, ed anco non vi annideranno tanto facilmente, come succede in così fatti argini, quegli animali che sono sì nocevoli agli argini stessi.

Alcune volte le acque provenienti da dirotte piogge, o da nevi liquefatte, scorrendo giù per le scarpe del cappello e dell'argine vi cagionano delle picciole caverne, delle sgrottature ossiano piccioli rigagnoli. A questi tenui difetti vi si rimedierà, riempiendo questi fori o smosse di terra con altra terra buona, bene stritolata, e sopra tutto bene follata o pestata.

Così le acque stesse provenienti da pioggie o da nevi liquefatte, alcune volte producono i lissoni ordinarj, cioè penetrando esse fra due lavori fatti in tempi diversi, senza le necessarie precauzioni, vi producono delle fenditure, e lisciano in modo la superficie del lavor più vecchio, che l'altro si trova in

pericolo di sdrucciolare, anzi alcune volte sdrucciola effettivamente in basso con danno dell'argine. A questo inconveniente si rimedierà scoprendo interamente e muovendo la superficie lisciata del lavoro più vecchio, e rifacendo l'altro con tutte le precauzioni necessarie, perchè succeda una buona unione tanto fra le sue parti che fra esso ed il lavoro esistente, delle quali bastantemente si è parlato nella quinta parte, e segnatamente all'occasione di impigliare un argine nuovo ad un vecchio.

Della debolezza.

Quando si prevederà che un argine sarà debole, ossia che non sarà abbastanza forte per sostenere le acque che al medesimo potranno appoggiarvisi, ad esso si faranno esteriormente alcuni altri corpi di terra appoggiati anzi impigliati ad esso medesimo. Onde dichiarare le figure e le posizioni e le dimensioni di questi nuovi corpi, si supponga espresso il profilo di una porzione debole di un argine dal trapezio *ABCD* (fig. 61, Tav. VI), il cui lato *CD* sia l'interno, e però l'*AB* l'esterno.

Comunemente per rinforzare un argine, allorchè ad esso sia appoggiata già l'acqua, si costruisce lungo la sua parte debole un altro corpo di terra dalla sua parte esterna, il cui profilo *Amno* generalmente è un trapezio od un parallelogrammo. Quando l'altezza di questo nuovo corpo di terra eguaglia l'altezza dell'argine, esso si chiama *Rinforzo* o *Spalleggiamento* dell'argine medesimo; o

quando sia essa minore dicesi semplicemente *Spalla*. Talvolta dubitando che l' argine insieme all' opera qui descritta, non sia ancora abbastanza forte per tenere a segno l' acqua, che già vi si appoggia, ad esso si unisce un altro corpo di terra, il cui profilo *opqr* è anch' esso un trapezio od un parallelogrammo avente l' altezza di circa due terzi dello spalleggiamento o della spalla già eseguita: questo secondo lavoro si dice *Banca* dell' argine. In fine, se questi due corpi di terra non bastino per togliere qualunque pericolo di rottura, vi si unirà un terzo corpo di terra, che abbia per profilo il trapezio o parallelogrammo *rstv*, ed una altezza circa di due terzi della banca: quest' ultimo lavoro si chiama comunemente *Sottobanca*.

Spesse volte però, quando un argine sia debole, e si voglia fortificare, in luogo dei distinti lavori suddetti, si costruisce un solo corpo di terra, il quale ha un profilo analogo alcune volte al triangolo *mAv* ed altre volte al quadrilatero *rsuA*, e si chiama dalla maggior parte dei periti *contro scarpa* o *banca* esteriore dell' argine. Anzi vi sono dei periti che nei tempi delle magre muniscono di una opportuna Banca quei tronchi d' argini che possono soggiacere nei tempi delle piene a filtrazioni o trapelamenti o sorgive, o per cui può occorrere uno scarico od un picciol trasporto: questo divisamento sarà sempre lodevole, perchè utilissimo, come lo prova la continua sperienza.

Quando poi all' argine, che si deve rinforzare, non vi sarà ancora appoggiata l' acqua a sostenersi, ed esso abbia la golena e si abbia una grandissima

probabilità, che un lavoro appoggiato alla sua scarpa interna potrà assodarsi prima della prossima piena, particolarmente se l'acqua a sostenersi possa essere corrente, onde rinforzare l'argine medesimo, invece dei lavori sopra descritti, se ne faranno altri appoggiati alla scarpa interna di esso, che abbiano per profili le figure *abcD*, *cdef*, *fghl* analoghe alle *Amno*, *opqr*, *rstv*. Questi nuovi corpi di terra, che hanno per profili le figure anzidette, e che si assomigliano rispettivamente alla spalla, banca, sottobanca, si chiamano comunemente *Petto* il primo, *Antipetto* il secondo, e *Parapetto* il terzo; e si debbano costruire con terra presa quà e là nella golena stessa se sia possibile. Alcune volte però, per rafforzare un argine troppo debole pel suo scopo, invece di questi ultimi distinti corpi di terra si fa un solo lavoro pure in terra analogo all'esterno *mAv* suddetto; e questo nuovo corpo si denomina *Spalleggiamento* della scarpa interna dell' argine.

Tutti i rinforzi di cui si è parlato qui sopra, siano essi interni od esterni debbono essere uniti all'argine e fra loro in modo di costituire un solo e medesimo corpo di terra, e però buon effetto produrranno le reciproche immorsature analoghe a quelle di cui si è parlato all'occasione d'impigliare un argine ad un altro; più quelli fra essi, che sono dalla parte interna debbono avere le faccie superiori inclinate verso la campagna interna, e gli altri cioè la spalla, banca ecc. verso la campagna esterna; e ciò affinchè i medesimi lavori siano meno danneggiati dalle acque piovane o da quelle provenienti da nevi liquefatte sull'argine o su di essi lavori.

Qualora poi si debba ingrossare un argine, il quale abbia uno o più dei suddetti lavori interni, si convertiranno questi medesimi lavori in parti dell' argine stesso; e se l' argine risultante abbisognerà anch' esso di simili lavori, essi si rinoveranno, qualora vi siano le condizioni necessarie superiormente dichiarate.

In fine, alcune volte succede, che, o la lunga durata di una piena, o la pioggia continuata senza interruzione nel tempo della piena stessa, o l'acqua proveniente dalle sorgive nella campagna esterna, ovvero due od anco tutte e tre queste cause, fanno penetrare tanta umidità nell'argine, che con grande difficoltà si può camminare su di esso senza profondarsi grandemente, quasi esso fosse un accavallamento di molta o fango; in questi casi, per buona sorte non molto comuni, il partito da prendersi onde fortificare l' argine reso debolissimo, sarà di portare su di esso della terra della più pesante asciutta e non troppo stritolata, e di spalleggiarlo, sostenendo questo lavoro ed anco la stessa scarpa interna con fascinate, fascinoni, buzzoni, ecc. fissati con opportuni pichetti al terreno, oppure, quando si abbiano alla mano, con altre materie molto pesanti e difficilmente dissolvibili dall' acqua. Cessata poi quella innondazione nel tempo della cui durata sia accaduto il grandissimo inzuppamento d'argine qui descritto, bisognerà disfare per intero quel tronco, che è andato soggetto al medesimo difetto, indi rifarlo con miglior terra, cioè con terra della meno soggetta ad imbeversi d' acqua.

Della Tracimazione.

Talvolta un argine è in pericolo di essere tracimato; cioè sorpassato dalle acque tenute a segno o circoscritte da esso medesimo. Per impedire questo spaventevole evento, che *tracimazione* si chiama, si fa costruire un *soprassoglio* o *sopraciglio*, il quale consiste in un arginello eretto sul piano dell'argine e dalla parte del suo ciglio interno. Questo lavoro si fa da questa banda del piano dell'argine in pericolo, affinchè si possa camminare sulla parte esterna del piano medesimo ancó dopo che le acqne crescenti abbiano sorpassato in altezza il ciglio interno; ed anco perchè facendolo in questo luogo del piano dell'argine, esso ha una stabilità maggiore di quella che avrebbe facendolo altrove, come risulta da una proposizione della parte seconda.

Il profilo di un soprassoglio si può vedere in *Cmnr* nella figura cinquantesima, il quale può essere simile a quello dell'argine medesimo: è bene però, che esso abbia le scarpe, segnatamente l'interna, meno inclinata coll' orizzonte di quelle dell'argine già stabilito: giacchè esso dovrà immediatamente sostenere la pressione dell'acqua, e qualche volta anco le onde, sbataizze, appena appena costruito; anzi generalmente non sono ancora finite le sue parti superiori, che le inferiori già contrastano con l'acqua.

Prima d'incominciare la fabbrica di un soprassoglio, sarà ottima precauzione il levare la cotica erbosa da quella porzione o lista del piano dell'argine, la quale dovrà servire di base al soprassoglio medesimo.

Comunemente la terra per formare questo corpo si prende dall'argine stesso e propriamente dal ciglio esterno; però, quando il bisogno del soprassoglio non sarà pressantissimo ossia il pericolo della tracimazione imminente, e che la campagna esterna non sia già coperta dall'acqua proveniente da pioggia o dalle sorgive, sarà meglio prendere la terra per formare il soprassoglio da questa medesima campagna, ad una ragionevole distanza dalla base dell'argine stesso. Alcuni pratici, qualora il pericolo della tracimazione sia urgentissimo, e preveggano che gli uomini dei quali possono disporre per formarlo, non saranno sufficienti per costruirlo in tempo onde impedire la tracimazione medesima, fanno smuovere ed innalzare una lista di terra del piano o del cappello dell'argine in pericolo, mediante un aratro; indi fanno accomodare alla meglio la terra così alzata con badili o zappe, il che si può conseguire in un tempo assai breve.

Onde preservare il soprassoglio, come anco qualunque altro nuovo lavoro, dai tristi effetti delle sbataizze ossiano botte delle onde innalzate dai venti burrascosi e dalle correnti contro od a seconda di esso, si fanno porre delle fascine o dei fascinoni o delle pertiche fogliose od altre consimili materie, dalla parte interna del medesimo lavoro; e vi si fissano con corde o salici legati a picchetti conficcati nel corpo dell'argine, verso il ciglio esterno, senza punto pregiudicare l'argine medesimo.

Calata l'acqua che minacciava l'argine di una tracimazione per evitare la quale siasi costruito un soprassoglio, generalmente si fa un *Rialzamento* ossia

si alza tutto l'argine come il soprassoglio stesso; o ciò che è lo stesso si converte l'argine avente per profilo *ABCD* in quello che ha per profilo *ArmD*, ingrossandolo se abbisogna.

La terra per formare un rialzamento e per ingrossare l'argine risultante, quando sarà possibile, si prenderà dalla campagua interna; e qualora si debba prendere dall' esterna, sarà bene che si prenda ad una ragionevole distanza dalla base dell'argine medesimo, e che si facciano i cavi larghi anzichè profondi. Alcune volte, cessato il pericolo della tracimazione, invece di fare i due lavori qui nominati, si distrugge anco il soprassoglio, rimettendo il tutto nel pristino stato; e questo si fa particolarmeute, quando la grande altezza della piena avvenuta abbia avuto origine da cause accidentali, che più non esistano, o che si possano togliere intgramente; giacchè in quest'ultimo caso, la distruzione delle cause dello straordinario innalzamento delle acque sarà il miglior partito a seguirsi, onde togliere per sempre il pericolo di analoghe tracimazioni.

Stante che un soprassoglio ha generalmente una picciola altezza, stimo bene, affinchè esso non riesca affatto inutile anzi nocevole, di rammentare uuovamente, che prima di incominciare la sua formazione effettiva, bisognerà assolutamente preparare la sua base in modo, che esso si possa unire perfettamente al corpo dell' argine, il che si conseguirà preparando questa base presso a poco, come si disse di preparare la base di un argine nuovo. Così dovendosi alzare ed ingrossare un argine, che abbia petto, antipetto, e parapetto, si convertiranno que-

sti corpi in parti dell'argine; costruendone al risultante dei nuovi se occorre, come già si è detto anco superiormente.

Accade talvolta, ad onta delle cure delle autorità locali, e di quelle dei proprietarj circostanti, e dei saggi suggerimenti dei periti, accade dico, che si presagisce la tracimazione di un argine assolutamente inevitabile; in questi casi, che sono veri flagelli della povera umanità, sarà bene che il perito di concerto colle autorità e coi possessori delle campagne e case circostanti, segnatamente coi possessori delle proprietà esterne all'argine, abbia il coraggio di ordinare uno o più tagli ossiano rotture artificiali all'argine medesimo, onde soccombere a mali minori di quelli che avrebbero luogo se si lasciasse accadere la tracimazione minacciata; e pel conseguimento di quest'ultimo fine, egli procurerà di stabilire la posizione dei tagli alle maggiori distanze dalle proprietà più importanti, segnatamente dagli abitati sì esterni che interni all'argine, ed anco dai terreni migliori per l'agricoltura, e di dare ordini precisi per la loro esecuzione, avvertendo anco gli operaj della maniera di condursi in queste malagevoli operazioni, onde non si espongano a verun pericolo: fatto ciò, al tempo prescritto, potrà ordinare l'effettiva esecuzione di essi, senza punto conturbarsi col pensare ai danni che emergeranno da queste funeste e da lui abborrite, ma necessarie operazioni; tanto più, che i possessori delle circostanti proprietà meno danneggiate, potranno adequatamente compensare coloro che venissero a soffrire colla esecuzione dei tagli, danni di gran lunga superiori a quegli che avrebbero presumibilmente sofferti per la temuta tracimazione.

Prima però di ordinare di questi tagli si dovranno assolutamente avvisare tutte le persone dei luoghi vicini siano dentro, siano fuori della linea dell' argine, ciò che nei nostri paesi si potrà fare mediante il suono delle campane parrocchiali; e porre fra l'avviso e l'esecuzione dei tagli il maggior tempo compatibile colle circostanze, più nel farsi i medesimi, si dovranno avere tutte le cure, perchè non accadano altre rotture all' argine tagliato o ad altri, come pur troppo accadde alcune volte; il che si conseguirà col farli in tali luoghi ed in modo che non riesca rapidissima la diminuzione dell' acqua sostenuta, diminuzione che succede effettivamente nel momento dei tagli, e che suole durare un tempo più o meno lungo secondo l'estensione delle campagne sì interne che esterne, non che della provenienza delle acque.

Se l'argine in pericolo di essere assolutamente tracimato avrà delle chiaviche od altre aperture artificiali, come si trovano in varj paesi, onde dare lo scolo alle acque che innonderebbero le campagne nei tempi delle magre, o per non interrompere la navigazione in qualunque stagione, in vece di fare i tagli suddetti, si potranno aprire le porte di questi edificj, e conseguire con ciò lo scopo che si conseguirebbe col tagli stessi, senza scompaginare in verun luogo l'argine in quistione.

Del Trapelamento.

Si dice *trapelamento* lo scappare che fa l'acqua a traverso l'argine per picciole fessure o piccioli fori

del medesimo: manifestamente un argine sarà difettoso, quando lascierà trapelare l'acqua sostenuta da esso; giacchè il trapelamento può essere causa, benchè alcune volte rimota, di una sua rottura; oltrecchè l'acqua trapelata generalmente danneggia molto la campagna esterna all'argine.

Se l'acqua proveniente da un trapelamento sortirà dal corpo dell'argine chiara o torbida precisamente, come la sostenuta da esso, non vi sarà pericolo, almeno pressante, che questo trapelamento produca una rottura nell'argine medesimo; all'opposto, se l'acqua escirà dall'argine torbida più di quella da esso sostenuta, il trapelamento potrà essere cagione di una imminente rottura o di uno scompaginamento delle parti dell'argine medesimo; per cui bisognerà porvi un subito riparo, perchè ciò non avvenga effettivamente.

Le posizioni dei punti della scarpa interna dove sono i fori o le fessure ed in generale i pertugi per cui l'acqua incomincia ad entrare nell'argine, alcune volte si conoscono, altre volte si scoprano dal rimolinar delle acque che corrono per entrarvi: generalmente però essi si scoprono, conficcando l'estremità di una pertica o la pala di un badile o quella di altro consimile strumento, contro la scarpa stessa; giacchè confricando i luoghi delle imboccature o vicino alle medesime, se l'acqua che trapela è limpida si fa torbida, e se è già torbida si accresce la sua torbidezza.

Le cause dalle quali può avere origine un trapelamento sono: l'inzuppamento d'acqua fatto dall'argine, per la grande umidità, per cui si suol dire

che esso *stravina :* le fenditure o le picciole crepature avvenute all' argine per una grande siccità o pel gonfiamento delle parti argillose inumidite, od anco per aver conficcato qualche palo in esso, o i rottami, le foglie, le paglie o steli d' erbe dimenticati nel corpo dell' argine, formandolo: i legni marciti nel medesimo, o meglio quei fori che rimangono nel corpo dell' argine infracidendosi i legni lasciati in esso: i fori o pertugi fatti all' argine dai sorci, dalle talpe, o da altri animali, od anco maliziosamente dagli uomini tristi con pertiche o trivelle, per cui ottimi sono i costumi vigenti in alcuni paesi di porre le guardie sugli argini, segnatamente nei tempi delle piene. Tutti questi difetti sono generalmente *locali*, il solo stravinamento alcune volte è generale ossia ha luogo per un tronco d' argine assai lungo, e per conseguenza più difficilmente si arriva a farlo cessare.

I trapelamenti più pericolosi per un argine sono quelli che succedono vicino od anco nelle stesse impigliature con altri argini, e quelli che hanno origine in quella parte della scarpa interna dell' argine, che ha un' altezza minore della metà di quella dell' argine stesso; per cui questi trapelamenti si debbano temere molto più di quelli che possono succedere altrove nel corpo dell' argine medesimo.

Per rimediare al trapelamento, detto stravinamento, si farà portare sul piano dell' argine della terra asciutta della più pesante e non eccessivamente sabbiosa, onde comprimere ogni parte dell' argine contro le corrispondenti sottoposte ed adjacenti, e con ciò chiudere od almeno diminuire i pertugi pei

quali trapela l'acqua; e nello stesso tempo, od immediatamente dopo, si spalleggierà l'argine, ed anco se lo stravinamento sarà grande vi si farà insieme alla spalla anco la banca e la sottobanca od altro lavoro equivalente.

I trapelamenti che hanno luogo per alcune picciole fessure o per piccioli fori, sono cagionati da eccessiva siccità, da rottami, da foglie, da legni marciti, o sono fatti da animali ovvero da uomini, si rimediano col far gettare dal ciglio interno dell'argine giù per la scarpa corrispondente della terra asciutta e sminuzzata e per quanto sia possibile della stessa qualità di quella componente il tronco d'argine corrispondente; giacchè questa terra cadendo, penetrerà, pel proprio peso e perchè trascinata dall'acqua, nei fori o nelle fessure e ristringerà sì gli uni che le altre. Questa operazione di gettare terra si continuerà finchè sia cessato interamente il trapelamento; e nel tempo stesso si tenterà con terra, zolle, erba e cose simili di turare quei pertugi del trapelamento, visibili nella scarpa esterna dell'argine.

Alcune volte col semplice stuzzicare alla imboccatura del trapelamento con un palo, o con un badile si fa cadere nella imboccatura medesima la terra che formava la parte superiore di essa, e così si toglie il trapelamento: altre volte si fa cessare il trapelamento col porre d'innanzi alla sua imboccatura un sacco pieno di sabbia bagnata leggermente, od anco col calarvi una semplice volpata, sempre verso la parte interna. In fine, talvolta si toglie il trapelameno col battere o col pestar il piano dell'argine superiormente ai pertugi del trapelamento stesso.

Qualora i mezzi qui indicati non siano sufficienti per togliere il trapelamento, ed esso sia dei più pericolosi, si farà costruire un pezzo d'argine al piede esterno di quel tronco che soffre il trapelamento medesimo, e talmente situato e figurato che con quest' ultimo formi, come un vaso o pozzo entro cui trapeli l'acqua successiva; giacchè quest'acqua trapelante, trovandosi per così dire raccolta nel vaso in tal guisa costruito, si innalzerà in esso, e finalmente giungerà ad avere un' altezza da impedire colla sua pressione il trapelamento di cui si tratta. Se poi il trapelamento che si ha di mira non sarà dei più pericolosi, si farà un fosso ossia una lunga buca nel ciglio esterno dell' argine, e tanto profonda da oltrepassare i fori del trapelamento, e se si può sino a scoprire la terra soda; indi si riempirà questo fosso o buca con terra stritolata ed anco presso a poco della stessa qualità di quella adjacente dell' argine, e di mano in mano si farà follare o pestare ogni suolo o cordolo di essa.

Quest' ultimo rimedio, quando si possa felicemente ultimare, toglie il trapelamento, ed assicura l'argigine; ma la sua esecuzione oltremodo difficile, si deve praticare con grande sollecitudine; per cui prima d'incominciare il fosso o la buca, si debbono preparare tutte quelle cose che all' uopo potrebbero esser utili; come sono, mucchi di terra già pestata ed in parte leggermente inumidita, qualora pel tempo già non lo sia anco di troppo, gli strumenti da carico tutti caricati della medesima e tutti gli altri strumenti che abbisognano per istritolare, accomodare, o pestare le terre dei piccioli cordoli: alcune volte

si preparano anco dei sacchi pieni di terra, delle volpate, e dei buzzoni; anzi in certa occasione, prima di incominciare questa operazione, si fece porre con buon successo all' ingresso del trapelamento un lenzuolo teso a modo di rete, ed appoggiato alla scarpa dell' argine.

Pei trapelamenti più pericolosi, facendosi il vaso suddetto, bisogna nel tempo del lavoro od almeno nel principio lasciare scorrere altrove l' acqua trapelante, regolandola in modo che attraversi la base dell' arginello in uno spazio ristretto, e poi chiudere questa sortita con tale rapidità e cautela, che il fondo del corrispondente picciolo tronco dell' arginello non risulti grandemente imbevuto d' acqua, precisamente come si pratica nella costruzione di alcune coronelle delle quali si parlerà fra poco.

Quando il trapelamento in quistione avrà luogo attraverso il terreno sottoposto al corpo dell' argine e l' acqua escirà presso la base dell' argine medesimo, esso trapelamento si potrà togliere scavando un fosso vicino alla base stessa, estraendone la terra infracidita o arenosa, e riempiendolo con altra terra fra la meno inzuppabile dall' acqua, ed innalzandovi sopra, se occorre, una contro scarpa: anzi, qualora la parte inferiore della adjacente scarpa esterna dell' argine sia anch' essa infracidita od eccessivamente arenosa, si procurerà di scambiarla essa pure in terra simile all' anzidetta, semprecchè ciò si possa eseguire, senza esporre l' argine in pericolo di esser rotto.

Se l' acqua tenuta a segno dall' argine che soffrirà un trapelamento sarà corrente, la terra a get-

tarsi dal ciglio interno di esso e di cui si è parlato sopra, converrà gettarla in quel luogo della superficie dell'acqua medesima dal quale essa calando al fondo pel suo peso sia trasportata dalla corrente all'imboccatura del trapelamento medesimo.

Se il trapelamento sarà grande e spaventevole, nel medesimo tempo che si getterà la terra per chiudere o ristringere i pertugi, si farà costruire anco il vaso o recipiente di cui si è parlato dianzi.

Sparito il pericolo del trapelamento, ossia ritiratasi l'acqua dal piede di un argine che sia andato soggetto ad un trapelamento, bisognerà disfare quel suo tronco corrispondente al luogo del trapelamento, indi rifarlo con tutti i dovuti riguardi a noi noti e già indicati parlando della costruzione di un argine; anzi ottimo sarà il partito di munirlo anco di una contro scarpa.

Dello Inzuppamento della sola parte interna del corpo dell'argine.

Alle volte l'acqua di una piena tenuta a segno da un argine penetrandolo inzuppa una sua porzione dalla parte interna, talchè nel calare dell'acqua medesima, cade in essa la porzione inzuppata, con pregiudizio della forza di esso.

La lunga durata di una piena, è generalmente la causa principale di questo parziale inzuppamento d'argine; come il calo subitaneo di essa piena è quella della caduta della stessa porzione inzuppata: però, tanto lo inzuppamento di questa parte, quanto la sua caduta, possono anco trarre origine, od almeno es-

sere favorite, dalla natura della terra componente la stessa parte, e dal metodo usato nel formarla. E per tanto, onde preservare un argine da questo difetto, bisognerà procurare di costruirlo con terra difficilmente inzuppabile dall' acqua e secondo le regole da noi già dichiarate nella parte penultima, ed anco, quando si possa, di scemare le durate delle piene.

I sintomi dai quali si rende manifesto che un argine è infetto dall' inzuppamento che si ha qui di mira, prima della intera caduta della suddetta sua porzione, generalmente sono, le crepature longitudinali che accadono al corpo dell' argine, o gli abbassamenti che soffre il ciglio interno dell'argine medesimo nel diminuirsi dell' acqua sostenuta da esso; alle volte però il perito scopre questo inzuppamento, facendo immergere nella porzione bagnata della scarpa interna qualche palo od istrumento. Quando il perito sia assicurato, che un argine è infetto dallo inzuppamento in quistione, egli per iscansare almeno le triste conseguenze che potrebbero emergere da esso, farà ingrossare l' argine coll' unirvi dalla parte esterna, qualche nuovo corpo di terra, fra quelli di cui si è parlato all' occasione della debolezza, e nel medesimo tempo farà *scaricare l' argine* cioè levare dal suo ciglio interno quella terra che minacciava di cadere nell' acqua per lo inzuppamento della sottoposta, facendola trasportare nella campagna esterna od anco gettare nell' acqua stessa, qualora non possa usarla, come si fa comunemente, per costruire i lavori anzidetti; giacchè con questa seconda operazione diminuendo il peso della porzione d'argine male

appoggiata si renderà più difficile la sua caduta, senza altra operazione. Anzi alcune volte converrà anco sostenere la stessa porzione d'argine inzuppata applicandovi dei buzzoni, delle fascine, o dei graticci sostenuti da opportuni pali conficcati nel fondo dell'acqua.

Come ho detto qui sopra, i lavori che si fanno per fortificare l'argine infetto dall'inzuppamento attuale si costruiscono generalmente colla terra levata dal ciglio interno per iscaricarlo; quando poi questa terra non è sufficiente per ultimare questi lavori, si ricorre alla campagna esterna, avendo però sempre quei riguardi che si sono dichiarati all'occasione della formazione di un argine.

Nello scaricare un argine, sia che si faccia per costruire i detti lavori, od unicamente per diminuire il peso della parte d'argine che minaccia di cadere nell'acqua, bisognerà assolutamente avvertire gli operaj del pericolo al quale si esporrebbero andando su questa medesima parte d'argine male appoggiata.

Ritiratasi l'acqua dal piede dell'argine, che è stato soggetto al presente inzuppamento, si rifà interamente quella sua parte dove ebbe luogo questo difetto: ed a questo nuovo tronco d'argine si costruisce il petto, l'antipetto ed il parapetto occorrendo, ovvero il solo corpo che può fare le veci di questi insieme; e tutti questi lavori si costruiscono con terra buona, sminuzzata, e con tutte le regole a noi note; più la terra per costruirli si procura di prenderla dalla golena dell'argine in quistione o dalla golena di altro argine vicino, od anco da qualche inutil tronco d'argine rimasto in golena ed anch'esso non molto lontano dai luoghi dei lavori medesimi.

Oltre il parziale inzuppamento d'argine di cui si è parlato qui sopra alle volte ne succede un altro, che trae origine dall'acqua che copre nei tempi delle piene qualche parte della campagna esterna. Quest'acqua appoggiandosi alla parte inferiore della scarpa esterna dell'argine, la penetra in modo, da renderla mal atta a sostenere l'argine medesimo; di maniera che esso si trova in pericolo di esser ribaltato sulla stessa campagna esterna. Questo inzuppamento si può scoprire anch'esso collo immergere nella parte della scarpa esterna a cui si appoggia l'acqua, qualche legno od istrumento; alle volte però si rende manifesto da qualche rilassamento che ha luogo nella scarpa stessa.

Il perito informato di questo inzuppamento, onde evitarne le conseguenze ordinerà la costruzione di qualche lavoro atto ad impedire la caduta della scarpa esterna dell'argine, sostenendo questo medesimo lavoro, all'occorrenza con buzzoni e fascine, o fascinoni ed anco grattici opportunamente fermate al terreno con picchetti o gran passoni; cioè precisamente come si è detto per lo inzuppamento di cui si è parlato qui sopra.

Del Froldo.

Si chiama froldo quel tronco o porzione d'argine a cui manca la golena; ed argine in froldo quello di cui è parte il froldo stesso. Alcuni froldi hanno la scarpa o sponda interna stabilita, cioè bensì lambita da qualche tempo dall'acqua, ma non alterata; altri invece hanno questa sponda medesima in cor-

rosione per cui continuamente cadono delle sue parti nell' acqua stessa : questi ultimi si debbono per conseguenza temere più dei primi, perchè la corrosione si può inoltrare a segno di distruggere od ingojare interamente l' argine, e con ciò esporre la campagna esterna al pericolo di essere innondata; ciò che può accadere facilmente nei tempi delle mezze piene, segnatamente quando accadono dei forti ondeggiamenti, ed anco nei tempi delle decrescenze delle grandi piene, e conseguentemente sta benissimo che i custodi delle arginature abbiano nei tempi qui detti di mira i froldi aventi le sponde in corrosione, più di qualunque altro luogo delle arginature medesime.

Quando un froldo abbia la scarpa interna stabilita, basterà pensare unicamente a conservare la medesima, ossia a consolidarla; invece nell' altro caso bisognerà anco procurare d' impedire l' effetto della corrosione, oppure di ritirare l' argine cioè di costruire una coronella. Alcune volte però, sebbene per pura precauzione, si fa eseguire la coronella anco nel primo caso, stante le variazioni delle correnti che possono avvenire nei tempi delle piene.

Per conservare la scarpa o la sponda auzidetta di un froldo sia essa stabilita od in corrosione, comunemente si costruiscono quelle opere che si chiamano bordature, scarpe artificiali ed alcune volte anco le pennellature: però, quando le circostanze lo permettono, il miglior partito da seguirsi in questi casi, per evitar almeno le innondazioni, è quello di ritirar l' argine ossia fare una coronella onde risparmiare di far gran lavori in acqua; perchè nella loro

costruzione si richiede una pratica non ordinaria, affinchè corrispondono alfine per cui si fanno costruire; però qualunque sia la scarpa di un froldo, se le circostanze locali non permetteranno un ritiro d'argine, converrà ricorrere ai mezzi per conservare la scarpa stessa, avendo di mira nel costruirli la forza delle correnti e la presumibile loro durata. Negli altri casi poi, cioè quando si potrà usare sì l'uno che l'altro dei due mezzi onde soccombere al minimo male, si procurerà di scoprire prossimamente il tempo della insistenza delle correnti sul froldo, e se la loro corrosione sia per progredire lentamente o con grande celerità; indi si calcolerà quanto costerebbero le costruzioni e manutenzioni delle opere necessarie per arrestare la corrosione e sostenere il froldo nel suo stato, e quanto importerebbero i ritiri successivi di argini o le coronelle insieme ai terreni che verrebbero ingojati dalle correnti adottando quest'altro partito; fatto ciò si darà la preferenza a quello di essi col quale il danno sarà per riescire il più picciolo: non dimenticando però le finanze di coloro a cui toccheranno le spese, ed anco che si deve risparmiare più che si può di far lavori in acqua come sopra si è detto, sebbene l'esito di alcuni di questi lavori progettati e fatti eseguire da peritissime persone siano riesciti felicemente.

Sebbene le bordature, le scarpe artificiali, e particolarmente le pennellature sono, come si è detto, le vere ed uniche opere da eseguirsi per sostenere e preservare almeno intatto un argine in froldo, nulladimeno, io qui intendo di parlare solamente delle coronelle, e di invitare il giovane bramoso d'istruirsi

anco sulle dette opere da leggere ciò che su questo proposito scrissero i più grandi architetti idraulici, e particolarmente la Memoria sul modo di riparare gli argini dei fiumi, pubblicata dal signor Agostino Masetti uno de' due nostri attuali Ispettori d'acque e strade, ed il Trattato sul miglior modo di costruire ripari sui fiumi e torrenti, pubblicato dal sig. Giuseppe Schemerl di Leytenbach, presidente del Consiglio Aulico in oggetti d' architettura ed acque e strade, cav. dell'ordine di Leopoldo ecc., ecc.

A scanso di qualunque equivoco avverto che io qui chiamo coronelle tutti quegli argini, che si fanno a fianco ed esteriormente ad un froldo, onde impedire alle acque di spandersi per le campagne esterne, quando anco accada l'intera distruzione del froldo medesimo, di modo che io qui comprendo sotto a questa denominazione le coronelle propriamente dette, ed anco quegli altri argini che si costruiscono in alcune delle anzidette occasioni, e che si chiamano generalmente ritirate d'argini, particolarmente quando si fanno di una altezza eguale a quella dell'argine in froldo e colla terra del froldo stesso.

Nella determinazione delle coronelle si debbono aver di mira particolrrmente le loro impigliature coll'argine vecchio, e l'andamento o posizione delle loro tracce. Le impigliature di una coronella coll'argine in froldo non si debbbono mai fare in quei luoghi di quest'argine, i quali sono già in corrosione o vi saranno probabilmente presto; e si debono eseguire con tutte le cautele necessarie, perchè succeda una perfetta unione fra i due lavori, e delle quali si è parlato già più volte. La traccia poi, qualora

non possa essere rettilinea, dovrà essere di una dolce piegatura, cioè senza angolosità; e se la brevità del tempo od altre circostanze non richiederanno, come accadde molte volte, di dover costruire la coronella colla porzione tuttora sussistente del froldo, si stabilirà la base della coronella sì lungi dalla base dell' argine in froldo da poter prendere almeno la terra necessaria per la sua formazione, nello spazio stesso che verrà racchiuso da essa e dal froldo medesimo, senza che i cavi risultino molto vicini nè alla base stessa della futura coronella, nè alla porzione tuttora sussistente del froldo.

Pochi sono i lavori in terra, che richieggono tante cautele quanto una coronella, perchè l' opera corrisponda al fine a cui è destinata sì rispetto alle preparazioni della sua base che alle impigliature, come anco nel resto della costruzione; sarà utilissimo per tanto, nella esecuzione di essa, che si abbia presente tutto ciò che si è dichiarato rispetto alla buona costruzione di un argine nuovo.

Alcune volte nel momento di costruire una coronella fra la base prescritta ad essa e l'argine in froldo esiste dell' acqua proveniente da sorgive o da trapelamenti del froldo stesso, la quale osterebbe alla costruzione della medesima; in questo caso converrà, o circoscrivere con arginelli quest' acqua in luoghi che non impediscono di costruire la coronella, o meglio farla scorrere altrove, regolandone lo scolo però in maniera, che nell' attraversare la base della prescritta coronella sia obbligata a scorrere in piccioli canaletti stabili alla più gran distanza dai luoghi delle impigliature che è compatibile colle circostanze.

INDICE

DELLE MATERIE

CONTENUTE

NEL PRESENTE VOLUME.

pag.	*lin.*	*Errori.*	*Correzioni.*
44	6	sottoposto	sottoposto e sopraposto.
47	7	area	aria
101	19	entrono	entrano
121	20	all' area	in area al
167	14	M	prima
ivi	15	della massa m	dell' altra
176	17	suolgono	sogliono
196	14	salita	solita
202	29	le	la
231	13	differiscono	differiscano
ivi	26	stesa	stessa
233	16	inclussivo	inclusivo
235	13	opportunemente	opportunamente
272	16	esse	essere
306	1	tura	di curvatura
ivi	7	esse	esso
309	7	grande	grandi
314	1	sciegliera	scegliera
317	30	incanelate	incanalate
319	7	coperti	coperte
321	31	impediscono	impediscano
344	11	scarica	carica
346	11	seguito	questo
364	11	non conoscono	conoscono
365	17	areo	area
370	6	esterna	interna
ivi	7	delle sorgive nella campagna esterna, ed in fine dei lissoni della scarpa interna	ed in fine delle sorgine nella campagna esterna
374	16	molta	malta
381	25	debbano	debbono
391	1	da	a
ivi	31	stabili	stabiliti

ALCUNI LIBRI

Vendibili da PAOLO EMILIO GIUSTI.

BRUNACCI: Elementi di Algebra e Geometria ricavati dai migliori scrittori di Matematica, 4.ª ediz. riveduta Milano, 1820, in 8.° con tavole in rame *Lir.*	4 —
—— Corso di Matematica sublime. Firenze, 1804, t. 4. in 4.° con tavole in rame . . . . »	75 —
—— Trattato dell' Ariete idraulico. Milano, 1810, in 4.° con tavole in rame . . . . »	8 50
Esame delle operazioni di Benedetto Castelli e di Alfonso Borelli sulle Lagune di Venezia, con un' appendice sulla riapertura del Businello. Ven. 1819, in 8.° »	2 50
FOCACCI (Francesco): Del modo di dirigere il corso dei fiumi e dei torrenti. Firenze, 1811, in 8.° . »	5 20
Fabbriche (Le) più cospicue di Venezia misurate, illustrate ed intagliate dai membri della Veneta R. Accademia di Belle Arti. Venezia, 1820, t. 2 in f.° in carta velina sopraffina . . . . »	480 —
GALILEO (Galilei): Le operazioni del Compasso geometrico e militare con le annotazioni del Bernaggieri. Milano, 1741, in 8.° . . . . »	4 —
GALLACINI (Teofilo): Trattato sopra gli errori degli architetti. Venezia 1767, in f.° al quale sono unite le Osservazioni di A. Visentini, che servono di Continuazione al Gallacini. Venezia, 1771, in fig. . ,,	33 —
GORINI (Giovanni): Elementi di Geometria piana e solida, di trigonometria rettilinea ecc. Pavia, 1819, in 8.° fig. . . . . ,,	7 50
—— Elementi di Matematica pura. Pavia, 1819, t. 2 in 8.° fig . . . . ,,	13 50
GROSSI (Luigi): Il Geometra pratico istrutto nel calcolo decimale e nel sistema metrico. Milano, 1812. in 8.°	2 50
MANETTI (Alessandro): Studio degli Ordini di Architettura. Firenze, 1808, in f.° fig. . . . . . ,,	12 —
NOBILI (Leopoldo): Introduzione alla Meccanica della materia. Milano, 1819, in 8.° fig. . . . . . ,,	4 —
—— Nuovo trattato d' ottica, o sia la scienza della luce dimostrata coi puri principj di Meccanica. Milano, 1820, in 8.° fig. . . . . ,,	6 —
—— Opera sopra l' indentità dell' attrazione molecolare coll' astronomica. Modena, 1818, in 4.° fig. »	5 —

Opuscoli scientifici. Bologna in 4.° — Opera periodica, di cui esce un fascicolo ogni due mesi. Ha cominciato coll' anno 1817; il prezzo d' Associazione annua è di. . . . . *Lir.* 20 —

Palladio (Andrea): Fabbriche e disegni raccolti ed illustrati da Ottavio Bertolli Scamozzi. Venezia, 1796, t. 5 in 4.° . . . . „ 50 —

Sangiorgio (Paolo): Del vetro idrostatico; dissertazione fisico-chimica. Milano, 1815, in 12.° . . „ — 75

Taccani (Francesco): Geometria descrittiva ad uso degli artisti. Milano, 1813, t. 2 in 4.° fig. . . „ 10 —

——— ——— ——— Detto in carta fina. . . . „ 15 —

Tadini (A.): Dell' Emissario del Sile volgarmente detto il Businello: lettera ad un amico. 1819, in 8.° „ — 80

Toaldo (Giuseppe): Tavole trigonometriche. 3.a edizione. Padova, 1794, in 4.° . . . . „ 6 50

Tramontini (Giuseppe): Delle Projezioni grafiche e delle loro principali applicazioni. Modena, 1811, t. 2 in 4.° fig. . . . . „ 19 —

Vannini (Giuseppe): Elementi di Architettura Civile. Firenze, 1818, in f.° fig. . . . . „ 36 —

Bertrand (Louis): Développement de la partie élémentaire des mathématiques, prise dans toute son étendue. Genève, 1778, t. 2 in 4.° . . . . . . „ 40 —

Bézout: Cours de Mathématiques à l' usage de la marine et de l'artillerie. Nouvelle édition revue avec le plus grand soin. etc. Paris, 1811, t. 4 in 8.° fig. „ 25 —

Dupin: Mémoires sur la Marine et les Ponts et Chaussées de France et d'Angleterre. Paris 1818, in 8.° „ 9 50

Exchaquet: Dictionnaire des Ponts et Chaussées, contenant les règles de la Construction, les usages etc. Paris, 1789, in 8.° . . . . „ 6 —

Gauss (De-Brunswick): Recherches arithmétiques traduites par M. Poulet-Delisle. Paris, 1807, in 4.° „ 27 —

Prony: Nouvelle Architecture hydraulique, contenant l' art d' élever l'eau au moyen de différentes machines etc. Paris, 1809, t. 3 in 4.° fig. . . . . „ 80 —

Reynaud (A. A. L.): Elémens d' Algèbre, précédés de l'introduction à l' algèbre. 3. édition. Paris, 1810, t. 2 in 8.° . . . . „ 15 —

Euleri: Introductio in Analysin infinitesimorum. Editio nova. Lugduni, 1797, t. 2 in 4.° tabulis æn. „ 30 —

Martino (Nicolai de) Elementa sectionum Conicarum. Neapoli, 1734, in 8.° . . . . „ 8 —

Calderari (Ottone). Disegni e scritti d'architettura. Vicenza, 1808, t. 2 in f.° fig. . . . . „ 113 62

Costruiti poscia quei tronchi della coronella, che non cadranno sopra i detti canaletti, si chiuderanno rapidamente le imboccature di questi con terra appositamente a ciò preparata, onde poter adattare i rimanenti loro fondi ad essere buone basi dei corrispettivi tronchi della coronella, e con ciò costruire anco questi tronchi al pari degli anzidetti.

Eseguita la coronella ed anco assodatasi sufficientemente; se sussisterà aucora una porzione dell'argine in froldo, la quale possa sostenere l' acqua di una piena appoggiata ad esso, e questa avvenga effettivamente, si potrà sperimentare, se la coronella sarà atta a sostenere almeno la pressione dell' acqua che vi appoggierà nel seguito; e ciò si dovrà fare coll' introdurre dell' acqua della piena stessa nello spazio racchiuso da essa coronella e dall' argine in froldo con tutte quelle precauzioni necessarie e notissime onde l' aqua non urti la coronella, nè produca scavazioni: fatto ciò, si chiuderanno le aperture del vecchio argine in froldo per le quali si sarà introdotta l'acqua medesima. Calando poi la piena, affinchè l' acqua introdotta fra il froldo e la coronella non faccia ribaltare questo nell' acqua calante, si farà sortire quella introdotta nello spazio anzidetto e con tutte le cautele necessarie, perchè essa non corroda il froldo stesso. Qualora poi al tempo di una piena si prevegga che la porzione sussistente del froldo non sarà atta a sostenere l' acqua della piena stessa, il miglior partito sarà quello di tagliare in più luoghi il froldo medesimo, onde l' acqua si appoggi tranquillamente alla coronella.

Quando un argine sarà in froldo e non si potrà fare la coronella, si eseguirà uno dei lavori di cui si è parlato superiormente, cioè una bordatura od una scarpa artificiale dalla parte interna, od anco, quando l'argine sia di grande importanza, una pennellatura.

Molte volte la corrosione di un froldo non è cagionata dal movimento naturale delle correnti, come si è supposto tacitamente sino ad ora, ma bensì da vortici prodotti da ostacoli incontrati dalle correnti stesse; in questi casi col togliere questi ostacoli al libero corso delle acque si faranno cessare i vortici, e segnatamente le corrosioni del froldo.

Finalmente, dalla corrosione che intacca l'argine e per cui si pensa a fare una coronella, talvolta si prevede che essa progredirà quasi uniformemente per un gran tempo; e la località permetterebbe di fare una sola coronella, che reggesse per tutto il tempo medesimo; ed anco di costruirne una, che potrebbe sussistere per un certo tempo, indi una seconda la quale potrebbe reggere per un altro tempo; così una terza, una quarta, ed una finalmente nel luogo stesso dell'unica anzidetta. In questi casi, non molto rari per le corrosioni del Po, l'ingegnere avveduto dovrà pensare se sarà più conveniente il primo ovvero il secondo di questi partiti, riflettendo che col primo si costruirebbe una sola coronella, ma si esporrebbe immediatamente tutta la campagna fra l'argine in corrosione e la coronella stessa al pericolo di essere inondata; mentre coll'altro si spenderebbe bensì molto di più nelle successive coronelle, ma si eviterebbero molte innondazioni a quelle campagne, che

rimarrebbero fuori delle coronelle costruite di mano in mano.

Vi sono altre occasioni per gli ingegneri che si occupano di arginature, nelle quali essi hanno bisogno della avvedutezza di cui si è parlato qui sopra, onde gli argini progettati riescano utili, segnatamente quando debbano progettare degli argini per evitare le innondazioni ad alluvioni stabilite od anco a terreni rimasti nella campagna interna agli argini principali. In queste occasioni essi dovranno stabilire la traccia degli argini a costruirsi in maniera, che l'aumento dell'annuo prodotto dei terreni ad arginarsi non riesca minore dell'annuale interesse del capitale che si dovrà impiegare per le arginature medesime. Anzi, quando l'aumento medesimo fosse temporaneo dovrà esser così grande da estinguere in questo tempo non solo gli annuali interessi del detto capitale, ma anco il capitale stesso.

Potrei trattare per questi argini ed anco per altri argini circondarj varie quistioni, come per esempio la seguente. « Qual debb'essere il minimo spazio da arginarsi, perchè l'arginatura non risulti passiva al proprietario di essa » ma siccome nell'atto pratico le loro soluzioni riescono facilissime, così stimo bene di ommetterle e di continuare invece l'esposizione della materia che forma lo scopo principale della parte presente.

Delle Sorgive
nella campagna esterna.

Un difetto comune a molti argini, e de' più difficili a rimediarsi, egli è quello delle sorgive che succedono nei tempi delle grandi piene nelle campagne esterne: alle volte l'acqua proveniente da queste sorgive è sì copiosa, che esse rassomigliano alle più grandi fontane artificiali.

L'acqua che sorte da queste sorgive, alcune volte è anch'essa torbida più di quella sostenuta dall'argine, altre volte invece non si distingue da questa: il primo di questi casi è molto da temersi, e poco il secondo; giacchè nel primo caso è segno che l'acqua uscente allarga i fori per cui passa, e però se non si ha certezza che essi non si potranno molto allargare, bisognerà porvi sollecitamente rimedio, altrimenti l'acqua sorgiva finirà coll'innondare interamente la campagna esterna ed anco col fare immense caverne nel terreno e portarsi via in collo, come si dice comunemente, lo stesso argine; all'opposto nel secondo, non distinguendosi l'acqua che sorte dai fori da quella che vi entra, questi fori saranno già stabiliti, e però da queste sorgive, pel momento non potrà emergere che un picciolo allagamento della campagna esterna.

Qualunque siano queste sorgive, la prima cosa a farsi per toglierle, sarà di scoprire i punti della golena o del corpo dell'argine per i quali l'acqua incomincierà ad entrare nei fori suddetti; ciò che si conseguirà, osservando attentamente, se nella superficie dell'acqua sostenuta vi sarà qualche picciolo movimento

vorticoso, il quale sarà visibile pel moto delle stesse correnti, o per quello di qualche materia galleggiante su di esse: come sono le schiume, le paglie, le foglie e i piccioli legni esistenti nell' acqua per accidentalità o messivi anco appositamente. Per assicurarsi poi, che questi luoghi saranno effettivamente quelli pei quali entrerà l' acqua uscente da quelle sorgive, che si avranno di mira nella campagna esterna, si farà gettare della terra incorporabile facilmente coll'acqua, dove vi saranno i detti movimenti vorticosi: giacchè, qualora essi siano i cercati, l'acqua che sortirà dalle sorgive suddette nel tempo di questa operazione od immediatamente dopo riescirà più torbida di quella che sortiva per lo innanzi.

Scoperti i luoghi dove hanno principio le sorgive in quistione, si farà versare in essi, usando barche se occorre, terra della più pesante ed asciutta e sufficientemente stritolata, se le sorgive saranno picciole; e delle zolle anco erbose, delle volpate, dei sacchi pieni di sabbia inumidita, ecc., qualora esse siano grandi; giacchè queste materie calando al fondo dell' acqua, spesse volte anzi quasi sempre, chiuderanno i pertugi pei quali l'acqua incomincierà a penetrare nella golena o nella scarpa interna, e con ciò si toglieranno le sorgive medesime.

Quando poi non si possono scoprire i detti luoghi o non si riesce a togliere le sorgive coi mezzi qui sopra indicati, si trovano quei luoghi della campagna esterna, dove hanno effettivamente luogo le sorgive medesime, il che riesce generalmente facile, stante i bollicamenti che succedono sopra verticalmente ad essi: fatto questo, si circoscrive ciascuno

di questi luoghi od anco più insieme con arginelli, oppure con picciole coronelle; e con ciò, sicuramente si impediscono le sorgive di cui si parla; giacchè le acque sorgenti, così raccolte, si alzano finalmente a tal punto, che colle loro pressioni, contrabilanciando quella dell'acqua tenuta a segno dall'argine, impediscono l'afflusso dell'acqua nei fori delle sorgive e conseguentemente anco l'afflusso successivo delle sorgive medesime; ed alcune volte si fa portare anco della terra sul tronco d'argine di fronte alle stesse sorgive o fontanacci, onde render più difficile ogni suo spostamento.

Qualora una sorgiva siasi fatta tanto grande, e continui tuttora ad ingrandirsi che la rottura dell'argine sia omai inevitabile, sarà bene che si oprono le chiaviche vicine ad essa: anzi in mancanza di queste, qualora il luogo della sorgiva sia dei più importanti fra i circonvicini, non sarà disapprovevole l'ordine di tagliare l'argine altrove, purchè si faccia coi riguardi a noi noti; giacchè alzandosi con ciò l'acqua nella campagna esterna si diminuirà la velocità dell'acqua uscente per la sorgiva, e conseguentemente minore risulterà l'inevitabile scompaginamento dell'argine nel luogo della sorgiva stessa.

Osservazione.

In fine, uno dei più utili divisamenti per il buon governo delle arginature egli è quello di destinare a ciascun individuo incaricato della loro sorveglianza una data porzione di esse; giacchè l'esperienza ha mostrato che l'interessamento di ciascuno di questi

individui, acciò non accadessero sinistri accidenti lungo le proprie porzioni, fu spinto da taluno al punto di porre in pericolo la propria vita: dimodochè, se nei tempi delle piene, anco le più pericolose per le arginature, si mandassero sugli argini degli ingegneri bene istruiti, fecondi di ripieghi e risoluti, e che sotto di essi avessero questi eccellenti individui, rarissime volte e forse mai, i fogli pubblici avrebbero occasione di riferire disgrazie provenienti dalle arginature.

FINE.

Tav. 1
F. 2
A
C
V
M
E
O
B
E
F
G
H
B
F. 6
B
Q
E
M
A
M
D
D
b
b'
n
c
B
C
h
A
r
R
B
C
E
T
D

Tav. II
F. 19
F. 21

F. 23
F. 26
F. 28
F. 30
F. 31

Tav. IV.
F. 37
F. 40
F. 41
F. 46
F. 44

Tav. V
Fig. 47
F. 50
F. 53

Tav. VI
F
G
B
m
A
i
P
h
k
L
H
f
C
n
D
P
K
T
V
x
F
G
f
r
g
e
s
h
D
E
L
H
3
λ
Δ
Y
4
8
9